Red Matemática Antioquia

Antioquia la más educada

Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las matemáticas en Antioquia

2012 - 2015

facebook.com/RedMatematicaAntioquia
@redmatematicant
redmatematica@antioquia.gov.co

CURSILLO DE ÁLGEBRA

Factorización de polinomios

Autoras

Beatriz Elena Correa Restrepo

Luz Elena Muñoz Sierra

Celia Villegas de Arias

Escuela de Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

ENCUENTRO CON LOS NÚMEROS

Tabla de Contenido

Prefacio

Uno de los objetivos de la Sociedad Colombiana de Matemáticas (SCM) es el mejoramiento de la enseñanza y la difusión de las Matemáticas en nuestro medio. Teniendo presente este objetivo, la Gobernación de Antioquia invitó a la SCM a diseñar un plan de trabajo para mejorar la enseñanza de las Matemáticas en el Departamento de Antioquia. Las razones de esta invitación se ven reflejadas en los resultados en el área de Matemáticas de las pruebas SABER (mayo de 2012) y de los exámenes de admisión de la Universidad de Antioquia (mayo de 2012), y en los resultados de la Prueba de Matemáticas de Antioquia (Olimpiadas del Conocimiento, julio de 2012): la nota promedio en Matemáticas, considerando estos tres exámenes, fue de 1.9 sobre 5.

Con el fin de enfrentar el problema del bajo nivel matemático de los estudiantes de los últimos grados de la educación secundaria en el departamento de Antioquia, la SCM diseñó el "Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las Matemáticas en las instituciones educativas de Antioquia". Este texto, que llega hoy a sus manos, es uno de los muchos productos que el Plan quiere entregarle a Antioquia y hace parte de una colección de cartillas, cada una conteniendo un pequeño cursillo, que fue escrito para los Encuentros con los Números, y cuyo objetivo es profundizar en algún tema específico de las áreas de Precálculo, Álgebra, Trigonometría, Geometría Analítica, Geometría Euclideana y Artimética.

Las Matemáticas son como un edificio. Para que el edificio se sostenga firmemente es necesario que tenga buenas bases. Los conceptos elementales que se recogen en los textos de esta colección son las bases que debe haber construido, con ayuda de sus maestros, un alumno de secundaria que aspire a entrar a la Universidad. Se observará que en ellos se ha tratado de describir en detalle los pasos a seguir en cada tema, ejercicio o problema propuesto. Pensamos, basados en nuestra propia experiencia, que ésta es una buena manera de dictar una clase de Matemáticas. Volviendo a la analogía inicial, así como un muro del edificio se construye poco a poco colocando cada uno de los ladrillos que lo componen, la solución de un ejercicio o problema matemático es una sucesión ordenada de pasos lógicos y coherentes. Si en la construcción del muro faltan ladrillos o hay ladrillos mal colocados es muy posible que el muro se derrumbe. Si en la solución de un problema matemático los pasos están mal concatenados o faltan pasos, probablemente la solución sea incorrecta.

Así como un deportista debe dedicar muchas horas diarias a su entrenamiento, para poder soñar con triunfar, si queremos mejorar nuestra comprensión de las Matemáticas es necesario repasar lo mismo muchas veces, aunque parezca monótono y repetitivo, de esta forma podremos enfrentar con mayor lucidez la construcción del edificio de las Matemáticas.

Finalmente es importante señalar que estos textos no pretenden ser un tratado de Pedagogía. Más bien constituyen un conjunto articulado de conocimientos matemáticos que un docente de secundaria puede enseñar de manera efectiva con el uso de los saberes pedagógicos adquiridos en su formación académica. Responden entonces estos textos a nuestra convicción de que si se quiere enseñar bien algo no son suficientes ni las estrategias pedagógicas utilizadas ni el uso de las nuevas tecnologías informáticas, es indispensable tener previamente un conocimiento sólido de la materia que queremos enseñar.

Carlos Montenegro
Presidente, Sociedad Colombiana de Matemáticas

Prólogo

Mejorar la enseñanza de las Matemáticas siempre es un reto. Los conceptos matemáticos básicos tienen cierto grado de complejidad y en consecuencia es crucial que los textos matemáticos que se escriban para apoyar el proceso de su enseñanza y aprendizaje usen un lenguaje claro que concentre su atención en los aspectos realmente importantes de estos conceptos y facilite su comprensión.

El presente texto ha sido escrito para los Encuentros con los Números como cursillo de formación de docentes, dentro del programa "Antioquia la más Educada", liderado por el Gobernador Sergio Fajardo Valderrama. La intención de este trabajo es hacer una exposición lo más clara posible de las nociones matemáticas, del tema considerado en el presente cursillo, que deberían ser conocidas por un bachiller antes de su ingreso a la universidad. Para ello hemos reducido la terminología matemática a la estrictamente necesaria y hemos prescindido de temas accesorios, que consideramos no son esenciales para la formación matemática de los estudiantes y que por el contrario pueden despertar en ellos un rechazo al estudio de las Matemáticas. De esta manera esperamos que este material contribuya a mejorar la percepción, entre los estudiantes, de la importancia de las Matemáticas y de su inmenso poder en la solución de problemas concretos, tanto de las ciencias naturales como de la vida cotidiana.

Comité Editorial

Introducción

Cuando los estudiantes ingresan a la universidad e inician su primer curso de Cálculo en cualquier carrera, no necesariamente del área de matemáticas, tienen dificultades en muchos temas del álgebra Elemental, especialmente en la factorización de polinomios.

En muchos casos, a pesar de entender los conceptos del Cálculo, sus deficiencias conceptuales en el álgebra y su poca destreza para resolver ejercicios y problemas, hacen que su rendimiento no sea el esperado, generando deserción en algunos casos, y en otros pérdida de los cursos, que también lleva a que el estudiante tenga que salir de la universidad, con la consecuente frustración y posible abandono de su formación profesional.

Con base en lo anterior, escogimos la factorización de polinomios como tema del cursillo. Para los asistentes a éste, en su mayoría profesores o estudiantes "encarretados" con las matemáticas, el tema es fácil y lo manejan muy bien, pero queremos insistir en la importancia de enseñar y reforzar la factorización de polinomios en sus clases en educación básica y media.

Presentamos al inicio de este cursillo los conceptos de factor y de factorización de polinomios. Luego damos las pautas para reconocer ciertos tipos especiales de polinomios, entre ellos algunos binomios y trinomios, y la forma de factorizarlos. Finalizamos trabajando la división sintética y los teoremas del residuo y del factor que sirven para factorizar otro tipo de polinomios.

El material que estamos entregando tiene además una buena cantidad de ejemplos resueltos, muchos de ellos con la explicación de cada uno de los pasos seguidos en su solución, lo que ayuda a entenderlos mejor. Recordemos que la destreza en la solución de ejercicios es cuestión de práctica, para lo cual se deben realizar muchos ejercicios, aunque algunos sean parecidos. La "repetición" refuerza el conocimiento.

El material presentado no se puede desarrollar en un cursillo de cuatro horas, pero puede ser de gran ayuda para todos ustedes en su trabajo diario en los cursos de matemáticas. Esperamos que lo estudien con detenimiento y lo utilicen en sus clases.

Las autoras

Cursillo de Álgebra

Factorización de polinomios

Al trabajar con los productos notables y en general con la multiplicación de polinomios, obtenemos un polinomio como el producto de dos o más polinomios. Vamos ahora a estudiar el proceso contrario, esto es, dado un polinomio vamos a expresarlo como el producto de dos o más polinomios.

Iniciemos refiriéndonos al concepto de factor para números enteros.

Por ejemplo, como $12 = 3 \cdot 4$ decimos que 3 y 4 son factores de 12. De igual forma 2 y 6 son factores de 12 porque $12 = 2 \cdot 6$. Â¿Cómo determinar si un entero b dado es un factor de 12? Lo será si hay un entero c tal que $12 = b \cdot c$, es decir, si la división $12 \div b$ es exacta.

En general, un entero $b \neq 0$ es un factor de un entero a si hay un entero c tal que

$$a = b \cdot c$$

o, en otras palabras, si la división $a \div b$ es exacta.

Ejemplo 1.1

Hallar todos los factores positivos de 18.

Solución

Haciendo la división de 18 entre cada uno de los enteros 1, 2, ..., 18 encontramos que la división es exacta únicamente para 1, 2, 3, 6, 9 y 18. Luego, estos números son los factores positivos de 18. Por ejemplo, 6 es un factor porque $\frac{18}{6} = 3$ y así $18 = 6 \cdot 3$.

Nótese que -6 también es factor ya que $18 = (-6)(-3)$. Los factores negativos de 18 son -1, -2, -3, -6, -9 y -18.

Un entero mayor que 1, cuyos únicos factores positivos son 1 y él mismo, se llama **número primo**. Por ejemplo, 2 es primo porque es mayor que 1 y sus únicos factores positivos son 1 y el propio 2. Los primos menores que 10 son 2, 3, 5 y 7.

Todo entero mayor que 1 puede expresarse como un producto de factores primos. Tal expresión se conoce como **factorización** o **descomposición en factores primos**.

A continuación ilustramos cómo obtener la descomposición en factores primos o factorización del número 126.

Empezamos dividiendo 126 entre 2: $126 \div 2 = 63$. Luego, $126 = 2 \cdot 63$.

Seguiría la división $63 \div 2$, pero ésta no es exacta.

Dividimos 63 entre 3 : $63 \div 3 = 21$. Luego, $126 = 2 \cdot \underbrace{3 \cdot 21}_{63}$.

Dividimos 21 entre 3 : $21 \div 3 = 7$. Luego, $126 = 2 \cdot 3 \cdot \underbrace{3 \cdot 7}_{21}$.

7 es primo : $7 \div 7 = 1$.

Luego, la factorización o descomposición en factores primos de 126 es

$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

El proceso anterior se realiza de manera abreviada en la forma siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Ejemplo 1.2

Factorizar o descomponer en sus factores primos los números: 273, 264 y 17.

Solución

Descomponemos 273, 264 y 17 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 264 & 2 \\ 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

Luego,

$273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$.

$264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$.

$17 = 17$, 17 es un número primo.

Vamos ahora a considerar el concepto de factor y de factorización para polinomios.

Dado un polinomio, cada uno de los polinomios que multiplicados entre sí dan como resultado el primero, se llama **factor** de ese polinomio.

Ejemplo 1.3

1. $x+1$ y $x-1$ son factores de x^2-1, ya que de los productos notables sabemos que $x^2-1=(x+1)(x-1)$.
2. $x+y$ es factor de $x^2+2xy+y^2$, ya que $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2=(x+y)(x+y)$.
3. $a-b$ es factor de $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. Â¿Por qué?
4. $4a$ y $2b-3$ son factores de $8ab-12a$. Â¿Por qué?
5. $x-5$ es factor de $(x-5)^2$. Â¿Por qué?

Ejemplo 1.4

Determinar si $x+1$ es o no es factor de x^3+x^2-3x-3.

Solución

Hagamos la división $(x^3+x^2-3x-3)\div(x+1)$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & -3x & -3 & x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & & & x^2-3 \\ \cline{1-4}
 & & -3x & -3 & \\
 & & 3x & +3 & \\ \cline{1-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Entonces,

$$\frac{x^3+x^2-3x-3}{x+1}=x^2-3$$

es decir,

$$x^3+x^2-3x-3=(x+1)\left(x^2-3\right).$$

Luego, $x+1$ sí es factor de x^3+x^2-3x-3.

Ejemplo 1.5

Determinar si $x-2$ es o no es factor de x^3-2x^2+2x-1.

Solución

Hagamos la división $(x^3-2x^2+2x-1)\div(x-2)$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -2x^2 & +2x & -1 & x-2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +2x^2 & & & x^2+2 \\ \cline{1-4}
 & & +2x & -1 & \\
 & & -2x & +4 & \\ \cline{1-4}
 & & & 3 &
\end{array}$$

Como
$$\frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x - 2} = x^2 + 2 + \frac{3}{x - 2},$$
la división no es exacta. Luego, $x - 2$ no es factor de $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$.

Factorizar un polinomio dado es expresarlo como un producto de dos o más polinomios.

Así como en los enteros hay números primos, en los polinomios hay polinomios primos: Un polinomio p de grado mayor o igual que 1 se llama **primo** si p no se puede expresar como producto de polinomios, cada uno de ellos de grado menor que el de p.

Notas:

- Nos limitaremos a polinomios con coeficientes enteros o con coeficientes racionales.
- Convenimos en que si el polinomio a factorizar tiene coeficientes enteros, la factorización es con factores cuyos coeficientes son también enteros. Si esto no es posible, entonces con factores cuyos coeficientes son racionales o en último caso números reales.
- Un polinomio p con coeficientes en un cierto conjunto numérico (enteros, racionales o reales) puede ser primo en dicho conjunto numérico, pero no serlo en otro.

Ejemplo 1.6

1. $2x - 3$ es primo (en los enteros, en los racionales y en los reales) porque no se puede expresar como un producto de polinomios de grado menor que 1, es decir, como un producto de polinomios constantes.
2. El polinomio $x^2 - 2$ es primo en el conjunto de los enteros y también en el de los racionales (Â¿Por qué?), pero no lo es en el conjunto de los reales, puesto que en dicho conjunto $x^2 - 2$ se factoriza como
$$x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right).$$
Recordemos que $\sqrt{2}$ no es entero ni racional.

Teniendo ya claros los conceptos de factor y factorización de un polinomio, veamos ahora algunas técnicas para factorizar polinomios teniendo en cuenta sus características. Iniciemos con los casos en los cuales todos los términos del polinomio tienen un factor común o al ordenarlos y agruparlos adecuadamente, se obtiene un factor común.

1.1 Factor común

Todos los términos del polinomio a factorizar tienen un factor común, es decir, aparecen números, letras o combinaciones de números y letras, comunes a todos los términos del polinomio. Para factorizarlo se expresa como el producto del factor común por el polinomio que se obtiene al dividir cada uno de los términos del polinomio dado entre el factor común.

El factor común puede ser un monomio o un polinomio de dos o más términos.

a) **El factor común es un monomio.**

Ejemplo 1.7

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $x^3 - x^2y + 3x$.
2. $9ab - 12bc + 30b^2$.
3. $-5x^6y^4 - 15x^2y^6 + 10x^2y^5 - 5x^2y^4$.
4. $18m^3n^4z - 12mn^2 + 36n^3z^3$.
5. $14x^2y^3 - 28x^3y^3 + 56x^4y^7$.

Solución

1. $x^3 - x^2y + 3x = x \cdot x \cdot x - x \cdot x \cdot y + 3x$. Como x es el único factor común en todos los términos, escribimos el polinomio original como el producto de x por un polinomio cuyos términos resultan de dividir cada uno de los términos del polinomio dado entre x. Así,
$$x^3 - x^2y + 3x = x\left(\frac{x^3}{x} - \frac{x^2y}{x} + \frac{3x}{x}\right) = x(x^2 - xy + 3).$$

2. El mayor factor común de los coeficientes 9, -12 y 30 es 3 y b es el único factor común literal. Tenemos así,
$$9ab - 12bc + 30b^2 = 3b\left(\frac{9ab}{3b} - \frac{12bc}{3b} + \frac{30b^2}{3b}\right) = 3b(3a - 4c + 10b).$$
En la práctica se escribe el resultado sin indicar las divisiones.

3. El mayor factor común de los coeficientes es -5 y el factor común literal de mayor grado es x^2y^4. Luego,
$$-5x^6y^4 - 15x^2y^6 + 10x^2y^5 - 5x^2y^4 = -5x^2y^4(x^4 + 3y^2 - 2y + 1).$$

4. Descomponemos 18, 12 y 36 en sus factores primos:
$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$
Luego, $18 = 2$ x 3^2, $12 = 2^2$ x 3 y $36 = 2^2$ x 3^2 y por tanto el mayor factor común de los coeficientes es 2 x 3 = 6. El factor común literal de mayor grado es n^2 y así,
$$18m^3n^4z - 12mn^2 + 36n^3z^3 = 6n^2(3m^3n^2z - 2m + 6nz^3).$$

5. Descomponemos 14, 28 y 56 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Como, $14 = 2$ x 7; $28 = 2^2$ x 7 y $56 = 2^3$ x 7, el mayor factor común de los coeficientes es 2 x $7 = 14$. El factor común literal de mayor grado es x^2y^3 y así:

$$14x^2y^3 - 28x^3y^3 + 56x^4y^7 = 14x^2y^3(1 - 2x + 4x^2y^4).$$

b) **El factor común es un polinomio**

Ejemplo 1.8

Descomponer en factores:

1. $x(a+1) + 3(a+1)$.
2. $2x(n-1) - 3y(n-1)$.
3. $6(x+5)^2 - 3(x+5)$.
4. $(3x+2)(x+y-z) - (3x+2) - (x+y-1)(3x+2)$.

Solución

1. $x(a+1) + 3(a+1) = (a+1)(x+3)$ El factor común es $a+1$.
2. $2x(n-1) - 3y(n-1) = (n-1)(2x-3y)$ El factor común es $n-1$.
3. $6(x+5)^2 - 3(x+5) = 3(x+5)[2(x+5)-1]$ El factor común es $x+5$

   $= 3(x+5)(2x+9)$.
4. $(3x+2)(x+y-z) - (3x+2) - (x+y-1)(3x+2)$

   $= (3x+2)[(x+y-z) - 1 - (x+y-1)]$ El factor común es $3x+2$

   $= (3x+2)(x+y-z-1-x-y+1)$ Eliminamos símbolos de agrupación

   $= (3x+2)(-z)$ Reducimos términos semejantes

   $= -z(3x+2)$.

1.2 Factor común por agrupación de términos

En algunos polinomios en los cuales no aparece explícito un factor común, al ordenar y agrupar adecuadamente los términos, se encuentra un factor común.

Ejemplo 1.9

Factorizar:

1. $x(a+1)-a-1$.

2. $am-bm+an-bn$.

3. $3m-2n-2nx^4+3mx^4$.

Solución

1. $$\begin{aligned} x(a+1)-a-1 &= x(a+1)-(a+1) && \text{Agrupamos los dos últimos términos}\\ &= (a+1)(x-1) && \text{El factor común es } a+1. \end{aligned}$$

2. Es muy importante tener en cuenta que al hacer las agrupaciones, las expresiones que se obtengan al sacar el factor común en cada una de ellas, sean iguales.

$$\begin{aligned} am-bm+an-bn &= (am-bm)+(an-bn)\\ &= m(a-b)+n(a-b)\\ &= (a-b)(m+n). \end{aligned}$$

La agrupación también pudo hacerse así:

$$\begin{aligned} am-bm+an-bn &= (am+an)-(bm+bn)\\ &= a(m+n)-b(m+n)\\ &= (m+n)(a-b). \end{aligned}$$

Observamos que, en ambos casos, el resultado es el mismo.

3. $$\begin{aligned} 3m-2n-2nx^4+3mx^4 &= (3m-2n)+(3mx^4-2nx^4)\\ &= (3m-2n)+x^4(3m-2n)\\ &= (3m-2n)(1+x^4). \end{aligned}$$

Organizando y agrupando los términos de otra forma:

$$\begin{aligned} 3m-2n-2nx^4+3mx^4 &= (3m+3mx^4)-(2n+2nx^4)\\ &= 3m(1+x^4)-2n(1+x^4)\\ &= (1+x^4)(3m-2n). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.10

Factorizar:

1. $n^2x-5a^2y^2-n^2y^2+5a^2x$

2. $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$

3. $3a - b^2 + 2b^2x - 6ax$.

Solución

1. $n^2x - 5a^2y^2 - n^2y^2 + 5a^2x$

$$
\begin{aligned}
&= (n^2x - n^2y^2) + (5a^2x - 5a^2y^2) && \text{Agrupamos los términos}\\
&= n^2(x - y^2) + 5a^2(x - y^2) && \text{Sacamos factor común en cada agrupación}\\
&= (x - y^2)(n^2 + 5a^2) && \text{El factor común es } x - y^2.
\end{aligned}
$$

2. $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$

$$
\begin{aligned}
&= (3ax - 2bx) + (-6a + 4b) + (-2by + 3ay) && \text{Agrupamos los términos}\\
&= x(3a - 2b) - 2(3a - 2b) + y(3a - 2b) && \text{Sacamos factor común en cada agrupación}\\
&= (3a - 2b)(x - 2 + y) && \text{El factor común es } 3a - 2b.
\end{aligned}
$$

3. $$
\begin{aligned}
3a - b^2 + 2b^2x - 6ax &= (3a - b^2) - (6ax - 2b^2x)\\
&= (3a - b^2) - 2x(3a - b^2)\\
&= (3a - b^2)(1 - 2x).
\end{aligned}
$$

A continuación aprenderemos a factorizar un tipo especial de trinomios conocidos como trinomios cuadrados perfectos.

1.3 Trinomio cuadrado perfecto

En productos notables vimos que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Las expresiones a la derecha de las igualdades, conocidas como **trinomios cuadrados perfectos**, sólo difieren en el signo del término de la mitad. Así, un trinomio cuadrado perfecto es un trinomio que tiene las siguientes características:

1. Dos de sus términos son cuadrados perfectos, con signo $+$, es decir, se pueden escribir de la forma a^2 y b^2.

2. El otro término es igual a dos veces el producto de las expresiones a y b que aparecen elevadas al cuadrado en 1., con signo $+$ o $-$.

Si en 2., el signo es $+$ el trinomio se factoriza como $(a + b)^2$, y si es $-$ se factoriza como $(a - b)^2$.

Ejemplo 1.11

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $9x^2 + 12x + 4$.
2. $4a^2 + 12ab + 9b^2$.
3. $z^2 - zy + y^2$.
4. $a^2 - \frac{18}{5}a + \frac{81}{25}$.
5. $x^2y^2 + 2xy + 1$.
6. $ax^2 - 8ax + 16a$.

Solución

1. $9x^2 + 12x + 4$ es un trinomio cuadrado perfecto ya que $9x^2 = (3x)^2$, $4 = 2^2$ y $12x = 2(3x)(2)$. Por tanto,
$$9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2.$$

2. Como $4a^2 = (2a)^2$, $9b^2 = (3b)^2$ y $12ab = 2(2a)(3b)$ entonces $4a^2 + 12ab + 9b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y por tanto,
$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2.$$

3. $z^2 - zy + y^2$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque aunque z^2 y y^2 son cuadrados perfectos, se tiene que el término de la mitad $-zy$ es diferente de $-2(z)(y)$. Entonces el trinomio no puede factorizarse como el cuadrado de un binomio.

4. Como a^2 es un cuadrado perfecto, $\frac{81}{25} = \left(\frac{9}{5}\right)^2$ y $\frac{18}{5}a = 2(a)\left(\frac{9}{5}\right)$ entonces
$$a^2 - \frac{18}{5}a + \frac{81}{25} = \left(a - \frac{9}{5}\right)^2.$$

5. Como $x^2y^2 = (xy)^2$, $1 = 1^2$ y $2xy = 2(xy)(1)$ entonces
$$x^2y^2 + 2xy + 1 = (xy + 1)^2.$$

6. $ax^2 - 8ax + 16a$ es un trinomio cuyos términos tienen un factor común a. Entonces
$$ax^2 - 8ax + 16a = a\left(x^2 - 8x + 16\right).$$

   La expresión entre paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto ya que x^2 es un cuadrado perfecto, $16 = 4^2$ y $8x = 2(x)(4)$. Luego
$$ax^2 - 8ax + 16a = a(x - 4)^2.$$

Ejemplo 1.12

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $\dfrac{a^2}{4} - ab + b^2$.
2. $12x^4 - \dfrac{36}{5}x^3y + \dfrac{27}{25}x^2y^2$.
3. $-2 + 12x^3 - 18x^6$.
4. $(x + 2y)^2 + 10(x + 2y) + 25$.
5. $\dfrac{1}{25} + \dfrac{25x^4}{36} - \dfrac{x^2}{3}$.
6. $(m + n)^2 - 2(a - m)(m + n) + (a - m)^2$.

Solución

1. $\dfrac{a^2}{4} - ab + b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$\frac{a^2}{4} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \ , \ b^2 = (b)^2 \ \text{ y } ab = 2\left(\frac{a}{2}\right)b.$$

Así,

$$\frac{a^2}{4} - ab + b^2 = \left(\frac{a}{2} - b\right)^2.$$

2. Todos los términos del trinomio $12x^4 - \dfrac{36}{5}x^3y + \dfrac{27}{25}x^2y^2$, tienen un factor común $3x^2$. Luego,

$$12x^4 - \frac{36}{5}x^3y + \frac{27}{25}x^2y^2 = 3x^2\left(4x^2 - \frac{12}{5}xy + \frac{9}{25}y^2\right).$$

El polinomio entre paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$4x^2 = (2x)^2 \ , \ \frac{9}{25}y^2 = \left(\frac{3}{5}y\right)^2 \ \text{ y } \ \frac{12}{5}xy = 2(2x)\left(\frac{3}{5}y\right).$$

Por tanto,

$$4x^2 - \frac{12}{5}xy + \frac{9}{25}y^2 = \left(2x - \frac{3}{5}y\right)^2.$$

Luego,

$$12x^4 - \frac{36}{5}x^3y + \frac{27}{25}x^2y^2 = 3x^2\left(2x - \frac{3}{5}y\right)^2.$$

3. Todos los términos del trinomio tienen un factor común 2. Luego,

$$-2 + 12x^3 - 18x^6 = 2\left(-1 + 6x^3 - 9x^6\right).$$

Observemos que si en lugar de sacar factor común 2, sacamos -2, los dos términos del trinomio que son cuadrados perfectos quedan con signo $+$.

$$-2+12x^3-18x^6=-2\left(1-6x^3+9x^6\right).$$

El polinomio entre paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto porque $1=1^2$, $9x^6=\left(3x^3\right)^2$ y $6x^3=2\left(1\right)\left(3x^3\right)$. Por tanto,

$$1-6x^3+9x^6=\left(1-3x^3\right)^2.$$

Luego,

$$-2+12x^3-18x^6=-2\left(1-6x^3+9x^6\right)=-2\left(1-3x^3\right)^2.$$

4. Como $\left(x+2y\right)^2$ es un cuadrado perfecto, $25=5^2$ y $10\left(x+2y\right)=2\left(x+2y\right)\left(5\right)$ entonces $\left(x+2y\right)^2+10\left(x+2y\right)+25$ es un trinomio cuadrado perfecto y así:

$$\left(x+2y\right)^2+10\left(x+2y\right)+25=\left(x+2y+5\right)^2.$$

5. $\dfrac{1}{25}+\dfrac{25x^4}{36}-\dfrac{x^2}{3}=\dfrac{1}{25}-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{25x^4}{36}$ es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$\frac{1}{25}=\left(\frac{1}{5}\right)^2,\quad \frac{25x^4}{36}=\left(\frac{5x^2}{6}\right)^2 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{3}=2\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5x^2}{6}\right).$$

Por tanto,

$$\frac{1}{25}+\frac{25x^4}{36}-\frac{x^2}{3}=\left(\frac{1}{5}-\frac{5x^2}{6}\right)^2.$$

6. Como $\left(m+n\right)^2$ y $\left(a-m\right)^2$ son cuadrados perfectos y el término de la mitad es $-2\left(a-m\right)\left(m+n\right)$, entonces tenemos un trinomio cuadrado perfecto y así,

$$\begin{aligned}\left(m+n\right)^2-2\left(a-m\right)\left(m+n\right)+\left(a-m\right)^2&=\left[\left(m+n\right)-\left(a-m\right)\right]^2\\&=\left(m+n-a+m\right)^2=\left(2m+n-a\right)^2.\end{aligned}$$

A continuación aprenderemos a factorizar polinomios que tienen la forma de una diferencia de cuadrados. Se desarrollarán ejemplos partiendo de la forma más sencilla hasta aquellos que requieren factorizaciones ya estudiadas.

1.4 Diferencia de cuadrados

De los productos notables sabemos que

$$\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a^2-b^2.$$

La expresión a la derecha de la igualdad es una diferencia de cuadrados perfectos, por tanto, si el polinomio a factorizar es de esta forma, debemos considerar esta igualdad de derecha a izquierda para factorizarlo como

$$a^2-b^2=\left(a+b\right)\left(a-b\right).$$

Ejemplo 1.13

Factorizar:

1. $x^2 - 16$.
2. $81y^2 - 25x^2$.
3. $x^4 - 81$.
4. $a^2 - \dfrac{1}{25}$.

Solución

1. $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x+4)(x-4)$. Por tanto,
$$x^2 - 16 = (x+4)(x-4).$$

2. $81y^2 - 25x^2 = (9y)^2 - (5x)^2 = (9y+5x)(9y-5x)$. Por tanto,
$$81y^2 - 25x^2 = (9y+5x)(9y-5x).$$

3. Como $x^4 - 81 = (x^2)^2 - 9^2$ entonces
$$x^4 - 81 = \left(x^2+9\right)\left(x^2-9\right).$$
El segundo factor es de nuevo una diferencia de cuadrados perfectos y por lo tanto se puede continuar con la factorización. Como $x^2 - 9 = x^2 - 3^2$ entonces $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ y así,
$$x^4 - 81 = \left(x^2+9\right)(x+3)(x-3).$$
Nota : $x^2 + 9$ no es factorizable en la forma $(x+a)(x+b)$ con a y b números reales, es decir, $x^2 + 9$ es primo en el conjunto de los reales.

   Más adelante veremos algunas sumas de dos cuadrados que sí se pueden factorizar en los reales.

4. $a^2 - \dfrac{1}{25} = a^2 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^2$. Por tanto,
$$a^2 - \frac{1}{25} = \left(a+\frac{1}{5}\right)\left(a-\frac{1}{5}\right).$$

Ejemplo 1.14

Factorizar:

1. $\dfrac{a^2}{36} - \dfrac{x^6}{25}$.
2. $(a-1)^2 - (m-2)^2$.
3. $25 - x^2 - 16y^2 + 8xy$.

4. $9x^2 + 4y^2 - a^2 - 12xy - 25b^2 - 10ab$.

Solución

1. Como $\dfrac{a^2}{36} - \dfrac{x^6}{25} = \left(\dfrac{a}{6}\right)^2 - \left(\dfrac{x^3}{5}\right)^2$ entonces,

$$\frac{a^2}{36} - \frac{x^6}{25} = \left(\frac{a}{6} + \frac{x^3}{5}\right)\left(\frac{a}{6} - \frac{x^3}{5}\right).$$

2. $$\begin{aligned}(a-1)^2 - (m-2)^2 &= [(a-1) + (m-2)][(a-1) - (m-2)]\\ &= (a - 1 + m - 2)(a - 1 - m + 2)\\ &= (a + m - 3)(a - m + 1).\end{aligned}$$

3. Ordenemos el polinomio así: $25 - x^2 - 16y^2 + 8xy = 25 - x^2 + 8xy - 16y^2$.

   Agrupemos los tres últimos términos en un paréntesis precedido de signo $-$.

$$25 - x^2 - 16y^2 + 8xy = 25 - (x^2 - 8xy + 16y^2).$$

   El polinomio entre paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto que podemos factorizar como

$$x^2 - 8xy + 16y^2 = (x - 4y)^2.$$

   Y por lo tanto,

$$\begin{aligned}25 - x^2 - 16y^2 + 8xy &= 25 - (x - 4y)^2\\ &= [5 + (x - 4y)][5 - (x - 4y)]\\ &= (5 + x - 4y)(5 - x + 4y).\end{aligned}$$

4. Ordenamos y agrupamos los términos del polinomio así:

$$9x^2 + 4y^2 - a^2 - 12xy - 25b^2 - 10ab = (9x^2 - 12xy + 4y^2) - (a^2 + 10ab + 25b^2).$$

   Cada uno de los polinomios entre paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto que factorizamos así:

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2 \;\text{ y }\; a^2 + 10ab + 25b^2 = (a + 5b)^2.$$

   Y así se tenemos que

$$\begin{aligned}9x^2 + 4y^2 - a^2 - 12xy - 25b^2 - 10ab &= (3x - 2y)^2 - (a + 5b)^2\\ &= (3x - 2y + a + 5b)(3x - 2y - a - 5b).\end{aligned}$$

Veamos a continuación cómo factorizar algunos trinomios que no son trinomios cuadrados perfectos.

1.5 Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción

Algunos trinomios, que no son trinomios cuadrados perfectos, se pueden convertir en trinomios cuadrados perfectos sumándoles una cantidad apropiada. Para que el trinomio dado no varíe, si sumamos una cantidad debemos restar la misma cantidad. ésta debe ser un cuadrado perfecto para que al restarla nos resulte una diferencia de cuadrados, que ya sabemos factorizar.

Ejemplo 1.15

Factorizar:

1. $a^4 + 2a^2 + 9$.
2. $1 - 126a^2b^4 + 169a^4b^8$.
3. $x^8 + 4x^4y^4 + 16y^8$.

Solución

1. Vemos que $a^4 + 2a^2 + 9$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque $a^4 = \left(a^2\right)^2$, $9 = 3^2$ y $2(a^2)(3) = 6a^2 \neq 2a^2$.

   Una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es convirtiendo el segundo término $2a^2$ en $6a^2$ y ello se logra sumándole $4a^2$. Para que el trinomio dado no varíe debemos restar la misma cantidad $4a^2$ que se sumó. Así,

$$\begin{aligned}
&a^4 + 2a^2 + 9 \\
&\quad = a^4 + 2a^2 + 9 + 4a^2 - 4a^2 && \text{Sumamos y restamos } 4a^2 \\
&\quad = (a^4 + 2a^2 + 9 + 4a^2) - 4a^2 && \text{Agrupamos los primeros 4 términos} \\
&\quad = (a^4 + 6a^2 + 9) - 4a^2 && \text{Reducimos términos semejantes en el paréntesis} \\
&\quad = (a^2 + 3)^2 - (2a)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\
&\quad = [(a^2 + 3) + 2a][(a^2 + 3) - 2a] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&\quad = (a^2 + 2a + 3)(a^2 - 2a + 3) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } a.
\end{aligned}$$

2. $1 - 126a^2b^4 + 169a^4b^8$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$1 = 1^2,\ 169a^4b^8 = \left(13a^2b^4\right)^2 \text{ y } 2(1)(13a^2b^4) = 26a^2b^4 \neq 126a^2b^4.$$

   En este caso una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es convirtiendo el segundo término $-126a^2b^4$ en $-26a^2b^4$ y ello se logra sumando $100a^2b^4$.

$$
\begin{aligned}
&1-126a^2b^4+169a^4b^8\\
&\quad = 1-126a^2b^4+169a^4b^8+100a^2b^4-100a^2b^4 && \text{Sumamos y restamos } 100a^2b^4\\
&\quad = (1-126a^2b^4+169a^4b^8+100a^2b^4)-100a^2b^4 && \text{Agrupamos los primeros 4 términos}\\
&\quad = (1-26a^2b^4+169a^4b^8)-100a^2b^4 && \text{Reducimos términos semejantes en el paréntesis}\\
&\quad = (1-13a^2b^4)^2-\left(10ab^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&\quad = [(1-13a^2b^4)+10ab^2][(1-13a^2b^4)-10ab^2] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&\quad = (1+10ab^2-13a^2b^4)(1-10ab^2-13a^2b^4) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } a.
\end{aligned}
$$

Nota: Observemos en los ejemplos anteriores, que la factorización del trinomio dado pudo hacerse, por este método, porque la cantidad que sumamos y restamos para completar el trinomio cuadrado perfecto es un cuadrado perfecto y de esa manera resultó al final una diferencia de cuadrados que hizo posible la factorización.

3. $x^8+4x^4y^4+16y^8$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$x^8=\left(x^4\right)^2,\ 16y^8=\left(4y^4\right)^2 \text{ y } 2(x^4)(4y^4)=8x^4y^4\neq 4x^4y^4.$$

En este caso una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es convirtiendo el segundo término $4x^4y^4$ en $8x^4y^4$ y ello se logra sumando $4x^4y^4$.

$$
\begin{aligned}
&x^8+4x^4y^4+16y^8\\
&\quad = x^8+4x^4y^4+16y^8+4x^4y^4-4x^4y^4 && \text{Sumamos y restamos } 4x^4y^4\\
&\quad = (x^8+4x^4y^4+16y^8+4x^4y^4)-4x^4y^4 && \text{Agrupamos los primeros 4 términos}\\
&\quad = (x^8+8x^4y^4+16y^8)-4x^4y^4 && \text{Reducimos términos semejantes}\\
&\quad = (x^4+4y^4)^2-\left(2x^2y^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&\quad = [(x^4+4y^4)+2x^2y^2][(x^4+4y^4)-2x^2y^2] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&\quad = (x^4+2x^2y^2+4y^4)(x^4-2x^2y^2+4y^4) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } x.
\end{aligned}
$$

Nota: En lugar de sumar y restar una cantidad apropiada para obtener un trinomio cuadrado perfecto, podemos también descomponer el segundo término en dos términos donde uno de ellos es el que se requiere para tener el trinomio cuadrado perfecto. Usemos esta técnica en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.16

Factorizar

1. x^4-7x^2+9.

2. $c^8 - 45c^4 + 100$.

3. $4 - 108x^2 + 121x^4$.

Solución

1. $x^4 - 7x^2 + 9$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque $x^4 = \left(x^2\right)^2$, $9 = 3^2$ y $2\left(x^2\right)(3) = 6x^2 \neq 7x^2$.

   Tendríamos un trinomio cuadrado perfecto si el segundo término fuera $6x^2$ y una manera de obtenerlo es descomponer $-7x^2$ como $-6x^2 - x^2$:

$$\begin{aligned}
x^4 - 7x^2 + 9 &= x^4 - 6x^2 - x^2 + 9 && \text{Descomponemos } -7x^2 \\
&= \left(x^4 - 6x^2 + 9\right) - x^2 && \text{Reorganizamos y agrupamos términos} \\
&= \left(x^2 - 3\right)^2 - x^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\
&= \left(x^2 - 3 + x\right)\left(x^2 - 3 - x\right) && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&= \left(x^2 + x - 3\right)\left(x^2 - x - 3\right) && \text{Ordenamos cada factor respecto} \\
& && \text{a la letra } x.
\end{aligned}$$

2. Observamos que $c^8 - 45c^4 + 100$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$c^8 = \left(c^4\right)^2,\ 100 = (10)^2 \text{ y } 2(c^4)(10) = 20c^4 \neq 45c^4.$$

   Tendríamos un trinomio cuadrado perfecto si el segundo término fuera $-20c^4$ y una manera de obtenerlo es descomponer $-45c^4$ como $-20c^4 - 25c^4$:

$$\begin{aligned}
&c^8 - 45c^4 + 100 \\
&\quad = c^8 - 20c^4 - 25c^4 + 100 && \text{Descomponemos } -45c^4 \\
&\quad = (c^8 - 20c^4 + 100) - 25c^4 && \text{Reorganizamos y agrupamos términos} \\
&\quad = (c^4 - 10)^2 - \left(5c^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\
&\quad = [(c^4 - 10) + 5c^2][(c^4 - 10) - 5c^2] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&\quad = (c^4 + 5c^2 - 10)(c^4 - 5c^2 - 10) && \text{Ordenamos cada factor respecto} \\
& && \text{a la letra } c.
\end{aligned}$$

3. Vemos que $4 - 108x^2 + 121x^4$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$4 = 2^2,\ 121x^4 = \left(11x^2\right)^2 \text{ y } 2(2)(11x^2) = 44x^2 \neq 108x^2.$$

   Una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es descomponer $-108x^2$ como

$-44x^2 - 64x^2$:

$$
\begin{aligned}
&4 - 108x^2 + 121x^4 \\
&\quad = 4 - 44x^2 - 64x^2 + 121x^4 && \text{Descomponemos } -108x^2 \\
&\quad = (4 - 44x^2 + 121x^4) - 64x^2 && \text{Reorganizamos y agrupamos términos} \\
&\quad = (2 - 11x^2)^2 - (8x)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\
&\quad = [(2 - 11x^2) + 8x][(2 - 11x^2) - 8x] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&\quad = (2 + 8x - 11x^2)(2 - 8x - 11x^2) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } x.
\end{aligned}
$$

Veamos ahora algunas sumas de dos cuadrados que se pueden factorizar, en forma similar a la estudiada en este caso.

1.6 Suma de dos cuadrados

A partir de algunas sumas de dos cuadrados se puede completar un trinomio cuadrado perfecto, como en el caso anterior, sumándoles y restándoles una misma expresión.

Ejemplo 1.17

Factorizar:

1. $4x^8 + y^8$.
2. $64 + a^{12}$.
3. $64x^4 + 81y^4$.

Solución

1. Como $4x^8 + y^8 = (2x^4)^2 + (y^4)^2$, para completar un trinomio cuadrado perfecto le sumamos un término igual a $2(2x^4)(y^4) = 4x^4y^4$, y para que el polinomio dado no varíe restamos ese mismo término. Haciendo esto estamos en el caso anterior y procedemos de igual forma. Así,

$$
\begin{aligned}
4x^8 + y^8 &= 4x^8 + y^8 + 4x^4y^4 - 4x^4y^4 && \text{Sumamos y restamos } 4x^4y^4 \\
&= (4x^8 + 4x^4y^4 + y^8) - 4x^4y^4 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos} \\
&= (2x^4 + y^4)^2 - \left(2x^2y^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\
&= [(2x^4 + y^4) + 2x^2y^2][(2x^4 + y^4) - 2x^2y^2] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&= (2x^4 + 2x^2y^2 + y^4)(2x^4 - 2x^2y^2 + y^4) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } x.
\end{aligned}
$$

2. Como $64+a^{12}=8^2+(a^6)^2$, para completar un trinomio cuadrado perfecto le sumamos un término igual a $2(8)(a^6)=16a^6$.

$$
\begin{aligned}
64+a^{12} &= 64+a^{12}+16a^6-16a^6 && \text{Sumamos y restamos } 16a^6\\
&= \left(64+16a^6+a^{12}\right)-16a^6 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos}\\
&= (8+a^6)^2-(4a^3)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= \left[(8+a^6)+4a^3\right]\left[(8+a^6)-4a^3\right] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= (8+4a^3+a^6)(8-4a^3+a^6) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } a.
\end{aligned}
$$

3. Como $64x^4+81y^4=\left(8x^2\right)^2+\left(9y^2\right)^2$, sumándole el término $2\left(8x^2\right)\left(9y^2\right)=144x^2y^2$ obtenemos un trinomio cuadrado perfecto.

$$
\begin{aligned}
64x^4+81y^4 &= 64x^4+81y^4+144x^2y^2-144x^2y^2 && \text{Sumamos y restamos } 144x^2y^2\\
&= \left(64x^4+144x^2y^2+81y^4\right)-144x^2y^2 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos}\\
&= \left(8x^2+9y^2\right)^2-(12xy)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= \left[\left(8x^2+9y^2\right)+12xy\right]\left[\left(8x^2+9y^2\right)-12xy\right] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= \left(8x^2+12xy+9y^2\right)\left(8x^2-12xy+9y^2\right) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } x.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.18

Factorizar:

1. x^8+324.
2. $a^4+\dfrac{b^4}{4}$.
3. $4+625y^8$.

Solución

1. Como $x^8+324=\left(x^4\right)^2+(18)^2$, sumándole el término $2\left(x^4\right)(18)=36x^4$ obtenemos un trinomio cuadrado perfecto.

$$
\begin{aligned}
x^8+324 &= x^8+324+36x^4-36x^4 && \text{Sumamos y restamos } 36x^4\\
&= \left(x^8+36x^4+324\right)-36x^4 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos}\\
&= \left(x^4+18\right)^2-\left(6x^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= \left[\left(x^4+18\right)+6x^2\right]\left[\left(x^4+18\right)-6x^2\right] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= \left(x^4+6x^2+18\right)\left(x^4-6x^2+18\right) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } x.
\end{aligned}
$$

2. Como $a^4+\dfrac{b^4}{4}=(a^2)^2+\left(\dfrac{b^2}{2}\right)^2$, si le sumamos el término $2\,(a^2)\left(\dfrac{b^2}{2}\right)=a^2b^2$ obtenemos un trinomio cuadrado perfecto.

$$
\begin{aligned}
a^4+\frac{b^4}{4} &= a^4+\frac{b^4}{4}+a^2b^2-a^2b^2 && \text{Sumamos y restamos } a^2b^2\\
&= \left(a^4+a^2b^2+\frac{b^4}{4}\right)-a^2b^2 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos}\\
&= \left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)^2-(ab)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= \left[\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)+ab\right]\left[\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)-ab\right] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= \left(a^2+ab+\frac{b^2}{2}\right)\left(a^2-ab+\frac{b^2}{2}\right) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } a.
\end{aligned}
$$

3. Como $4+625y^8=2^2+(25y^4)^2$, si le sumamos el término $2\,(2)\,(25y^4)=100y^4$ obtenemos un trinomio cuadrado perfecto.

$$
\begin{aligned}
4+625y^8 &= 4+625y^8+100y^4-100y^4 && \text{Sumamos y restamos } 100y^4\\
&= \left(4+100y^4+625y^8\right)-100y^4 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos}\\
&= \left(2+25y^4\right)^2-\left(10y^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= \left[\left(2+25y^4\right)+10y^2\right]\left[\left(2+25y^4\right)-10y^2\right] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= \left(2+10y^2+25y^4\right)\left(2-10y^2+25y^4\right) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } y.
\end{aligned}
$$

A continuación aprenderemos a factorizar algunos trinomios de la forma x^2+bx+c.

1.7 Trinomios de la forma x^2+bx+c

De los productos notables sabemos que

$$(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq.$$

El lado derecho de esta igualdad es un polinomio de la forma x^2+bx+c, con $b=p+q$ y $c=pq$. Por tanto, si queremos expresar un polinomio de la forma x^2+bx+c como el producto de dos factores $x+p$ y $x+q$, debemos encontrar p y q tales que su producto sea c, es decir $c=pq$, y su suma sea b, o sea $p+q=b$.

Ejemplo 1.19

Expresar los siguientes polinomios como producto de dos factores de grado 1:

1. $x^2 + 10x + 21$.
2. $28 + a^2 - 11a$.
3. $36 + 5x - x^2$.

Solución

1. Veamos si el polinomio $x^2 + 10x + 21$ se puede expresar de la forma $(x+p)(x+q)$, o sea, si hay dos números p y q tales que $pq = 21$ y $p + q = 10$.

   Las formas de expresar 21 como el producto de dos enteros son: $(21)(1)$, $(-21)(-1)$, $(7)(3)$ y $(-7)(-3)$. Ahora como $21 + 1 \neq 10$, $-21 - 1 \neq 10$, $7 + 3 = 10$ y $-7 - 3 \neq 10$, entonces los únicos números que cumplen la condición son 7 y 3. Por tanto escribimos el polinomio dado como producto de dos factores así,

$$x^2 + 10x + 21 = (x+7)(x+3).$$

2. Aunque el polinomio $28 + a^2 - 11a$ aparentemente no es de la forma $x^2 + bx + c$, si lo organizamos adecuadamente tenemos,

$$28 + a^2 - 11a = a^2 - 11a + 28.$$

   Las formas de expresar 28 como el producto de dos enteros son: $(28)(1)$, $(-28)(-1)$, $(14)(2)$, $(-14)(-2)$, $(7)(4)$ y $(-7)(-4)$. Ahora como $28 + 1 \neq -11$, $-28 - 1 \neq -11$, $14 + 2 \neq -11$, $-14 - 2 \neq -11$, $7 + 4 \neq -11$ y $-7 - 4 = -11$, entonces los únicos números que cumplen la condición son -7 y -4. Por tanto,

$$28 + a^2 - 11a = a^2 - 11a + 28 = (a-7)(a-4).$$

3. Organizamos el trinomio en la forma $-x^2 + 5x + 36$.

   Como el coeficiente de x^2 es -1, sacamos factor común -1 y así,

$$-x^2 + 5x + 36 = -\left(x^2 - 5x - 36\right).$$

   Factoricemos el polinomio que está entre paréntesis. Las formas de expresar -36 como el producto de dos enteros son: $(36)(-1)$, $(-36)(1)$, $(18)(-2)$, $(-18)(2)$, $(12)(-3)$, $(-12)(3)$, $(9)(-4)$, $(-9)(4)$ y $(6)(-6)$. Ahora como $36 - 1 \neq -5$, $-36 + 1 \neq -5$, $18 - 2 \neq -5$, $-18 + 2 \neq -5$, $12 - 3 \neq -5$, $-12 + 3 \neq -5$, $9 - 4 \neq -5$, $-9 + 4 = -5$ y $6 - 6 \neq -5$, entonces los únicos números que cumplen la condición son -9 y 4 y así $x^2 - 5x - 36 = (x-9)(x+4)$. Luego,

$$36 + 5x - x^2 = -\left(x^2 - 5x - 36\right) = -(x-9)(x+4) = (9-x)(x+4).$$

   ¿Por qué?

Nota:

Con la práctica, los números p y q tales que $x^2 + bx + c = (x+p)(x+q)$ se pueden hallar por tanteo, sin necesidad de escribir todos los productos de dos números que sean iguales a c.

Ejemplo 1.20

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $110 - x - x^2$.
2. $x^4 - 14x^2 - 51$.
3. $(3x+2)^2 + 8(3x+2) + 12$.

Solución

1. Organizamos el trinomio en la forma $-x^2 - x + 110$.

   Como el coeficiente de x^2 es -1, sacamos factor común -1 y así,

   $$-x^2 - x + 110 = -\left(x^2 + x - 110\right).$$

   Factoricemos el polinomio $x^2 + x - 110$ que está entre paréntesis. Para ello descomponemos 110 en sus factores primos:

   $$\begin{array}{r|l} 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

   Como la suma de los dos factores debe ser 1, los factores cuyo producto es -110, que cumplen esta condición son -10 y 11, y así $x^2 + x - 110 = (x-10)(x+11)$. Luego,

   $$110 - x - x^2 = -\left(x^2 + x - 110\right) = -(x-10)(x+11) = (10-x)(x+11).$$

2. $x^4 - 14x^2 - 51 = (x^2)^2 - 14x^2 - 51$.

   Podemos ver el polinomio dado como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ con x^2 en el lugar de x. Para factorizarlo debemos hallar dos números cuyo producto sea -51 y cuya suma sea -14.

   Como

   $$\begin{array}{r|l} 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

   los factores de -51 cuya suma es -14 son 3 y -17. Luego,

   $$x^4 - 14x^2 - 51 = (x^2)^2 - 14x^2 - 51 = (x^2+3)(x^2-17).$$

3. Al igual que en el ejemplo anterior, podemos ver el polinomio $(3x+2)^2+8\,(3x+2)+12$ en la forma x^2+bx+c con $3x+2$ en el lugar de x. Para factorizarlo, encontramos que 6 y 2 son dos números cuyo producto es 12 y su suma es 8 y así:

$$(3x+2)^2+8\,(3x+2)+12=[(3x+2)+6]\,[(3x+2)+2]=(3x+8)\,(3x+4)\,.$$

Nota:

En los dos ejemplos anteriores tenemos expresiones de la forma $(\square)^2+b\,(\square)+c$ donde $\square$ representa a su vez una expresión algebraica. Si es posible hallar dos números p y q cuyo producto sea c y su suma b entonces podemos factorizar la expresión dada así:

$$(\square)^2+b\,(\square)+c=(\square+p)\,(\square+q)\,.$$

Observemos que en el lado derecho de la igualdad, el primer término de cada factor es la expresión algebraica representada por $\square$.

Ejemplo 1.21

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $65+8xy-x^2y^2$.
2. $x^2+17xy+60y^2$.
3. x^6-7x^3-8.

Solución

1. Organizamos el polinomio dado y sacamos factor común -1:

$$65+8xy-x^2y^2=-x^2y^2+8xy+65=-(x^2y^2-8xy-65).$$

El trinomio que está entre paréntesis lo podemos ver en la forma x^2+bx+c si consideramos a xy en el lugar de x :

$$x^2y^2-8xy-65=(xy)^2-8(xy)-65.$$

Hallemos dos números cuyo producto sea -65 y cuya suma algebraica sea -8. Como

$$\begin{array}{r|l} 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

los factores de -65 cuya suma es -8 son 5 y -13. Luego,

$$x^2y^2-8xy-65=(xy)^2-8xy-65=(xy+5)(xy-13).$$

Y así,

$$65+8xy-x^2y^2=-(x^2y^2-8xy-65)=-(xy+5)(xy-13)=(xy+5)(13-xy).$$

2. Este polinomio lo podemos considerar en la forma $x^2 + bx + c$ con $a = 1$, $b = 17y$ y $c = 60y^2$. Debemos entonces hallar dos números cuyo producto sea $60y^2$ y cuya suma sea $17y$.

   Descomponemos 60 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

   Los factores de $60b^2$ cuya suma es $17b$ son $12b$ y $5b$ ya que $(12b)(5b) = 60b^2$ y $12b+5b = 17b$. Luego,

$$a^2 + 17ab + 60b^2 = (a + 12b)(a + 5b).$$

3. El polinomio $x^6 - 7x^3 - 8 = (x^3)^2 - 7x^3 - 8$ se puede ver en la forma $x^2 + bx + c$ si en el lugar de x tenemos x^3.

   Debemos hallar dos números cuyo producto sea -8 y cuya suma algebraica sea -7. Estos números son -8 y 1 y así

$$x^6 - 7x^3 - 8 = (x^3)^2 - 7x^3 - 8 = (x^3 - 8)(x^3 + 1).$$

   Observemos que los factores $x^3 - 8 = x^3 - 2^3$ y $x^3 + 1 = x^3 + 1^3$ son una diferencia de cubos y una suma de cubos respectivamente, que más adelante veremos cómo factorizarlas.

Veamos ahora cómo factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ para los cuales $a \neq 1$.

1.8 Trinomios, de la forma $ax^2 + bx + c$

Como

$$(px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + rq)x + rs,$$

vemos que el lado derecho de esta igualdad es un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a = pq$, $b = ps + rq$ y $c = rs$.

Luego, para factorizar un trinomio $ax^2 + bx + c$ en la forma $(px + r)(qx + s)$, debemos encontrar p, q, r y s tales que $pq = a$, $ps + rq = b$ y $rs = c$.

Ejemplo 1.22

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $18x^2 - 13x - 5$.
2. $6y^2 + 11y - 21$.
3. $20x^2 + 7x - 6$.

4. $12x^2y^2 + xy - 20$.

5. $6x^2 - 11dx - 10d^2$.

Solución

1. En este caso $a = 18$, $b = -13$ y $c = -5$. Debemos encontrar p, q, r y s tales que

$$a = 18 = pq \quad , \quad c = -5 = rs \quad \text{y} \quad b = -13 = ps + rq.$$

Las formas de expresar $a = 18$ como producto de dos enteros son: $(18)1$, $(-18)(-1)$, $2(9)$, $(-2)(-9)$, $6(3)$ y $(-6)(-3)$. Similarmente, las formas de expresar $c = -5$ como producto de dos enteros son: $(5)(-1)$ y $(-5)1$.

Para visualizar más fácilmente las parejas de factores que necesitamos, es útil construir una tabla como la siguiente:

a	p	q	c	r	s
18	18	1	-5	5	-1
	-18	-1		-1	5
	2	9		1	-5
	-2	-9		-5	1
	6	3			
	-6	-3			

Como $b = -13 = 18(-1) + 5(1)$ entonces $p = 18$, $q = 1$, $r = 5$ y $s = -1$ cumplen las condiciones requeridas. Por tanto,

$$18x^2 - 13x - 5 = (18x + 5)(x - 1).$$

2. Para este caso $a = 6$, $b = 11$ y $c = -21$ y la tabla correspondiente es la siguiente:

a	p	q	c	r	s
6	6	1	-21	21	-1
	-6	-1		-1	21
	3	2		-21	1
	-3	-2		1	-21
				7	-3
				-3	7
				-7	3
				3	-7

Como $11 = 6(3) + (-7)\,1$, entonces $p = 6$, $q = 1$, $r = -7$ y $s = 3$, y así,

$$6y^2 + 11y - 21 = (6y - 7)\,(y + 3)\,.$$

3. La tabla de los ejemplos anteriores se puede obviar ya que con un poco de práctica los valores apropiados de p, q, r y s se pueden encontrar por tanteo.

Por tanteo encontramos que los factores 5 y 4 de 20, y -2 y 3 de -6 cumplen que $7 = 5(3) + 4(-2)$, el cual es el coeficiente del término en x. Luego,

$$20x^2 + 7x - 6 = (5x - 2)(4x + 3).$$

4. Escribamos el polinomio dado como $12(xy)^2 + 1(xy) - 20$.

   Tomamos 4 y 3 como factores de 12 y -5 y 4 como factores de -20, y como el coeficiente del término en xy es $1 = 4(4) + 3(-5)$ entonces,

$$12x^2y^2 + xy - 20 = (4xy - 5)(3xy + 4).$$

5. Como el polinomio dado es de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a = 6$, $b = -11d$ y $c = -10d^2$, busquemos p, q, r y s tales que

$$a = 6 = pq \quad , \quad c = -10d^2 = rs \quad \text{y} \quad b = -11d = ps + rq.$$

   Las formas de expresar $a = 6$ como producto de dos enteros son $6(1)$, $(-6)(-1)$, $2(3)$ y $(-2)(-3)$. Ahora, de las formas de expresar a $c = -10d^2$ como producto de dos factores sólo nos interesan las siguientes:

$$(-10d)(1d) \quad , \quad (10d)(-1d) \quad , \quad (-2d)(5d) \quad \text{y} \quad (2d)(-5d).$$

   Observemos que estas son las formas de expresar -10 como producto de dos factores, pero multiplicando cada uno de los factores por d.

   Escogemos como factores de 6 a 3 y 2, y como factores de -10 a 2 y -5, y puesto que $-11 = 3(-5) + 2(2)$ entonces $p = 3$, $q = 2$, $r = 2d$ y $s = -5d$ cumplen las condiciones. Así que

$$6x^2 - 11dx - 10d^2 = (3x + 2d)(2x - 5d).$$

   Observamos que el polinomio $6x^2 - 11dx - 10d^2$ también lo podemos escribir como $-(10d^2 + 11dx - 6x^2)$

   Factorizamos la expresión $10d^2 + 11dx - 6x^2$ entre paréntesis:

$$10d^2 + 11dx - 6x^2 = (5d - 2x)(2d + 3x).$$

   Luego,

$$\begin{aligned} 6x^2 - 11dx - 10d^2 &= -10d^2 - 11dx + 6x^2 \\ &= -(10d^2 + 11dx - 6x^2) \\ &= -(5d - 2x)(2d + 3x) \\ &= (2x - 5d)(2d + 3x). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.23

Factorizar:

1. $6x^2 - 31x + 35$.

2. $20 - 9x - 20x^2$.

3. $21x^2 - 26xy - 72y^2$.

Solución

1. Debemos hallar dos números cuyo producto sea $a = 6$ y dos números cuyo producto sea $c = 35$. Para ello hallemos los factores de estos números.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Como $-31 = 2(-5) + 3(-7)$ entonces $p = 2$, $q = 3$, $r = -7$ y $s = -5$, y así

$$6x^2 - 31x + 35 = (2x - 7)(3x - 5).$$

2. Como $20 - 9x - 20x^2 = -\left(20x^2 + 9x - 20\right)$, factorizamos el polinomio $20x^2 + 9x - 20$ que está entre paréntesis. Para ello debemos hallar dos números cuyo producto sea 20:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Como $9 = 4(-4) + 5(5)$ entonces,

$$20x^2 + 9x - 20 = (4x + 5)(5x - 4).$$

Luego,

$$20 - 9x - 20x^2 = -(20x^2 + 9x - 20) = -(4x + 5)(5x - 4) = (4x + 5)(4 - 5x).$$

3. Hallemos dos números cuyo producto sea 21 y dos cuyo producto sea 72:

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Como $-26 = 3(-18) + 7(4)$ entonces,

$$21x^2 - 26xy - 72y^2 = (3x + 4y)(7x - 18y).$$

Estudiaremos ahora cómo factorizar algunos polinomios de cuatro términos con características especiales.

1.9 Cubo de binomios

En productos notables vimos:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

El lado derecho de estas igualdades se conoce como **cubo perfecto de binomios** o simplemente **cubo de binomios**.

Para que un polinomio ordenado en forma descendente respecto a una letra a sea el cubo de un binomio $a+b$, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Que tenga cuatro términos, todos con signo positivo.
2. Que el primero y último términos sean cubos perfectos, siendo estos a^3 y b^3 respectivamente.
3. Que el segundo término sea $3a^2b$ y que el tercer término sea $3ab^2$.

Es decir, si se cumplen estas condiciones el polinomio se factoriza como $(a+b)^3$.

De igual forma se deben cumplir condiciones similares a las anteriores para que un polinomio se factorice como el cubo de un binomio $a-b$. En este caso, ordenados los términos, los signos deben ser alternadamente positivos y negativos.

Ejemplo 1.24

1. Dado el polinomio $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$, determinar si cumple las condiciones para ser el cubo de un binomio.
2. Ver si el polinomio $a^6 - 6a^4 + 12a^2 - 8$ es el cubo de un binomio.
3. Factorizar, si es posible, el polinomio $1 + 12a + 48a^2 + 64a^3$.
4. Factorizar $\dfrac{x^3}{8} + \dfrac{x^2y}{4} + \dfrac{xy^2}{6} + \dfrac{y^3}{27}$.

Solución

1. El polinomio tiene cuatro términos, todos con signo positivo.

   $8x^3$ es un cubo perfecto porque $8x^3 = (2x)^3$.

   1 es un cubo perfecto porque $1 = 1^3$.

   $3(2x)^2(1) = 12x^2$ es el segundo término.

   $3(2x)(1)^2 = 6x$ es el tercer término.

   Se cumplen las condiciones y por tanto el polinomio dado es el cubo de $2x+1$, es decir,

$$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x+1)^3.$$

2. El polinomio tiene cuatro términos, con signos alternadamente positivos y negativos. a^6 es un cubo perfecto porque $a^6 = (a^2)^3$.

   8 es un cubo perfecto porque $8 = 2^3$.

   $-3\left(a^2\right)^2(2) = -6a^4$ es el segundo término.

   $3\left(a^2\right)(2)^2 = 12a^2$ es el tercer término.

   Luego, el polinomio dado es el cubo del binomio $a^2 - 2$, es decir,

$$a^6 - 6a^4 + 12a^2 - 8 = \left(a^2 - 2\right)^3.$$

3. Para saber si es factorizable como el cubo de un binomio, veamos si se cumplen las condiciones para ello: son cuatro términos todos con signo positivo, $1 = 1^3$, $64a^3 = (4a)^3$, $3(1)^2(4a) = 12a$ es el segundo término y $3(1)(4a)^2 = 48a^2$ es el tercer término. Por tanto, el polinomio representa el cubo del binomio $1 + 4a$, es decir,

$$1 + 12a + 48a^2 + 64a^3 = (1 + 4a)^3.$$

4. Son cuatro términos todos con signo positivo, $\dfrac{x^3}{8} = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3$, $\dfrac{y^3}{27} = \left(\dfrac{y}{3}\right)^3$, $3\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\left(\dfrac{y}{3}\right) = \dfrac{x^2y}{4}$ que es el segundo término y $3\left(\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{y}{3}\right)^2 = \dfrac{xy^2}{6}$ que es el tercer término. Luego, el polinomio dado es el cubo del binomio $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3}$, es decir,

$$\frac{x^3}{8} + \frac{x^2y}{4} + \frac{xy^2}{6} + \frac{y^3}{27} = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^3.$$

Ejemplo 1.25

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $x^6 + 3x^4y^3 + 3x^2y^6 + y^9$.
2. $3a^{12} + 1 + 3a^6 + a^{18}$.
3. $125a^3 - 300a^2b + 60ab^2 - 64b^3$.
4. $y^9 + 18y^6 + 36y^3 + 216$.

Solución

1. Como $x^6 = (x^2)^3$ es un cubo perfecto, $y^9 = (y^3)^3$ es un cubo perfecto, $3(x^2)^2y^3 = 3x^4y^3$ es el segundo término y $3x^2(y^3)^2 = 3x^2y^6$ es el tercer término, se cumplen las condiciones para ser el cubo de un binomio. Luego,

$$\begin{aligned} x^6 + 3x^4y^3 + 3x^2y^6 + y^9 &= (x^2)^3 + 3(x^2)^2y^3 + 3x^2(y^3)^2 + (y^3)^3 \\ &= (x^2 + y^3)^3. \end{aligned}$$

2. Ordenando los términos con respecto a la letra a tenemos que

$$3a^{12} + 1 + 3a^6 + a^{18} = a^{18} + 3a^{12} + 3a^6 + 1.$$

Como $a^{18} = (a^6)^3$ es un cubo perfecto, $1 = 1^3$ es un cubo perfecto, $3(a^6)^2(1) = 3a^{12}$ es el segundo término y $3(a^6)(1)^2 = 3a^6$ es el tercer término, se cumplen las condiciones para ser un cubo perfecto y por tanto,

$$3a^{12} + 1 + 3a^6 + a^{18} = (a^6)^3 + 3(a^6)^2(1) + 3a^6(1)^2 + 1^3 = (a^6 + 1)^3.$$

3. Veamos si se cumplen las condiciones para que este polinomio sea el cubo de un binomio:

$125a^3 = (5a)^3$ es un cubo perfecto, $8b^3 = (2b)^3$ es un cubo perfecto, $3(5a)^2(4b) = 300a^2b$ es el segundo término y $3(5a)(4b)^2 = 60ab^2$ es el tercer término.

Por tanto, se cumplen las condiciones y como los signos son alternadamente positivos y negativos, entonces,

$$125a^3 - 300a^2b + 60ab^2 - 64b^3 = (5a - 4b)^3.$$

4. Tenemos que: $y^9 = (y^3)^3$ es un cubo perfecto, $216 = 6^3$ es un cubo perfecto, $3(y^3)^2(6) = 18y^6$ es el segundo término, pero $3(y^3)(6)^2 = 108y^3 \neq 36y^3$.

Como el tercer término no cumple la condición, el polinomio dado no es factorizable como el cubo de un binomio.

Estudiaremos a continuación la factorización de polinomios que tienen la forma de una suma o de una diferencia de cubos.

1.10 Suma o diferencia de cubos

Dos productos, que pueden considerarse como productos notables, son:

$$\begin{aligned}(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) &= a^3 + b^3 \\ (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) &= a^3 - b^3.\end{aligned}$$

Estas igualdades, escritas como

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 &= (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)\end{aligned}$$

nos muestran como factorizar una suma o una diferencia de cubos.

Ejemplo 1.26

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $a^3 - 8$.
2. $27m^3 + 64n^9$.
3. $a^3 + 8b^{15}$.
4. $\dfrac{x^6}{125} - \dfrac{y^3}{8}$.

Solución

1. $$\begin{aligned} a^3 - 8 &= a^3 - 2^3 && \text{Diferencia de cubos} \\ &= (a-2)\left(a^2 + 2a + 4\right) && \text{Factorizamos la diferencia de cubos.} \end{aligned}$$

   Luego,
   $$a^3 - 8 = (a-2)\left(a^2 + 2a + 4\right).$$

2. $$\begin{aligned} 27m^3 + 64n^9 &= (3m)^3 + \left(4n^3\right)^3 && \text{Suma de cubos} \\ &= \left(3m + 4n^3\right)\left((3m)^2 - (3m)(4n^3) + (4n^3)^2\right) && \text{Factorizamos la suma de cubos} \\ &= \left(3m + 4n^3\right)\left(9m^2 - 12mn^3 + 16n^6\right). \end{aligned}$$

   Luego,
   $$27m^3 + 64n^9 = \left(3m + 4n^3\right)\left(9m^2 - 12mn^3 + 16n^6\right).$$

3. $$\begin{aligned} a^3 + 8b^{15} &= a^3 + (2b^5)^3 && \text{Suma de cubos} \\ &= (a + 2b^5)(a^2 - 2ab^5 + 4b^{10}) && \text{Factorizamos la suma de cubos.} \end{aligned}$$

   Luego,
   $$a^3 + 8b^{15} = (a + 2b^5)(a^2 - 2ab^5 + 4b^{10}).$$

4. $$\begin{aligned} \frac{x^6}{125} - \frac{y^3}{8} &= \left(\frac{x^2}{5}\right)^3 - \left(\frac{y}{2}\right)^3 && \text{Diferencia de cubos} \\ &= \left(\frac{x^2}{5} - \frac{y}{2}\right)\left(\left(\frac{x^2}{5}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{5}\right)\left(\frac{y}{2}\right) + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right) && \text{Factorizamos la diferencia de cubos} \\ &= \left(\frac{x^2}{5} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x^4}{25} + \frac{x^2 y}{10} + \frac{y^2}{4}\right). \end{aligned}$$

   Luego,
   $$\frac{x^6}{125} - \frac{y^3}{8} = \left(\frac{x^2}{5} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x^4}{25} + \frac{x^2 y}{10} + \frac{y^2}{4}\right).$$

Ejemplo 1.27

Factorizar:

1. $1 + 1.000x^6$.
2. $216a^{12} + 125b^9$.
3. $8(m-n)^3 - 125(m+n)^3$.

4. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 27a^3b^3$.

Solución

1. $1 + 1.000x^6 = 1^3 + (10x^2)^3$ Suma de cubos
$= (1 + 10x^2)(1 - 10x^2 + 100x^4)$ Factorizamos la suma de cubos.

2. $216a^{12} + 125b^9 = (6a^4)^3 + (5b^3)^3$ Suma de cubos
$= (6a^4 + 5b^3)(36a^8 - 30a^4b^3 + 125b^6)$ Factorizamos la suma de cubos.

3. $8(m - n)^3 - 125(m + n)^3$
$$\begin{aligned}
&= [2(m-n)]^3 - [5(m+n)]^3\\
&= [2(m-n) - 5(m+n)][4(m-n)^2 + 10(m-n)(m+n) + 25(m+n)^2]\\
&= (2m - 2n - 5m - 5n)[4(m-n)^2 + 10(m-n)(m+n) + 25(m+n)^2]\\
&= (-3m - 7n)(4m^2 - 8mn + 4n^2 + 10m^2 - 10n^2 + 25m^2 + 50mn + 25n^2)\\
&= (-3m - 7n)(39m^2 + 42mn + 19n^2).
\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 27a^3b^3 &= \left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right) + 27a^3b^3\\
&= (a+b)^3 + (3ab)^3\\
&= (a + b + 3ab)[(a+b)^2 - 3ab(a+b) + (3ab)^2]\\
&= (a + 3ab + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3a^2b - 3ab^2 + 9a^2b^2).
\end{aligned}$$

Terminaremos este cursillo sobre factorización presentando dos resultados, conocidos como teorema del residuo y teorema del factor, que nos permiten factorizar algunos polinomios, en particular los de grado tres o más, que no haya sido posible factorizarlos por los métodos ya vistos. Inicialmente veremos un método simplificado para realizar algunas divisiones de polinomios, llamado división sintética, que constituye una herramienta importante en el proceso de factorización de un polinomio usando estos teoremas.

1.11 División sintética

La **Regla de Rufini**, más conocida como **División Sintética**, es una forma simplificada o abreviada del procedimiento para dividir polinomios, cuando el divisor es de la forma $x - a$, donde a es un número.

Vamos a explicar el procedimiento para realizar la división sintética mediante un ejemplo.

Consideremos la división
$$2x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \div x - 3.$$

Realicemos primero la división en la forma usual (división larga):

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -x^3 & +2x^2 & +5x & -6 & x-3 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +6x^3 & & & & 2x^3+5x^2+17x+56 \\ \cline{1-5}
 & 5x^3 & +2x^2 & +5x & -6 & \\
 & -5x^3 & +15x^2 & & & \\ \cline{1-5}
 & & 17x^2 & +5x & -6 & \\
 & & -17x^2 & +51x & & \\ \cline{1-5}
 & & & 56x & -6 & \\
 & & & -56x & +168 & \\ \cline{1-5}
 & & & & 162 &
\end{array}
$$

El cociente es $2x^3 + 5x^2 + 17x + 56$ y el residuo es 162.

A continuación explicamos paso a paso el procedimiento para hacer la división sintética con este ejemplo:

- Del dividendo sólo se escriben los coeficientes y en la casilla del divisor $x - a$ se escribe solamente el número a, que para el ejemplo es 3:

$$
\begin{array}{ccccc|l}
2 & -1 & 2 & 5 & -6 & 3 \\ \cline{6-6}
\end{array}
$$

- Se deja un espacio debajo del renglón anterior (para un segundo renglón) y se traza un segmento de recta horizontal. Se inicia el proceso de división bajando el primer coeficiente, 2, al tercer renglón ubicado debajo del segmento trazado (notemos que 2 es el primer coeficiente del cociente):

$$
\begin{array}{ccccc|l}
2 & -1 & 2 & 5 & -6 & 3 \\ \cline{6-6}
 & & & & & \\ \cline{1-5}
2 & & & & &
\end{array}
$$

- El coeficiente bajado, 2, se multiplica por a, que en nuestro caso es 3, y el resultado, 6, se escribe en el segundo renglón debajo del segundo coeficiente del dividendo, que es -1. Se hace la suma $-1 + 6$ y el resultado, 5, se escribe en el tercer renglón:

$$
\begin{array}{ccccc|l}
2 & -1 & 2 & 5 & -6 & 3 \\ \cline{6-6}
 & 6 & & & & \\ \cline{1-5}
2 & 5 & & & &
\end{array}
$$

- Se repite con 5 lo que acabamos de hacer con el primer coeficiente 2, es decir, se multiplica 5 por a (que es 3), se coloca el resultado, 15, en el segundo renglón debajo del tercer coeficiente y se suma verticalmente:

$$
\begin{array}{ccccc|l}
2 & -1 & 2 & 5 & -6 & 3 \\ \cline{6-6}
 & 6 & 15 & & & \\ \cline{1-5}
2 & 5 & 17 & & &
\end{array}
$$

- Se continúa este proceso de multiplicar y sumar hasta que se use el último coeficiente:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -1 & 2 & 5 & -6 & 3 \\ & 6 & 15 & 51 & 168 & \\ \hline 2 & 5 & 17 & 56 & 162 & \end{array}$$

- El resultado se lee en el tercer renglón así: Los números de izquierda a derecha, sin incluir el último, son los coeficientes del cociente, correspondientes a potencias decrecientes de x, teniendo presente que el grado del cociente es una unidad menor que el grado del dividendo. El último número de dicho renglón es el residuo.

  Como el grado del divisor es 4, el del cociente es 3, es decir, el cociente es $2x^3 + 5x^2 + 17x + 56$. El residuo es 162.

Observación:

Al escribir los coeficientes del dividendo debemos tener cuidado que él esté ordenado en potencias decrecientes de la variable. Si faltan algunas de estas potencias, por cada una que falte se coloca 0 como coeficiente en el lugar correspondiente.

Ejemplo 1.28

Usando división sintética, dividir $2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1$ entre $x - 2$.

Solución

Como en el dividendo falta el término en x escribimos 0 como coeficiente en el lugar correspondiente al coeficiente de x.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & 3 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ & 4 & 14 & 26 & 52 & \\ \hline 2 & 7 & 13 & 26 & 51 & \end{array}$$

Del tercer renglón vemos que el cociente es $2x^3 + 7x^2 + 13x + 26$ y el residuo es 51, es decir,

$$\frac{2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1}{x - 2} = 2x^3 + 7x^2 + 13x + 26 + \frac{51}{x - 2}.$$

Ejemplo 1.29

Hallar, usando división sintética, el cociente y el residuo de dividir $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ entre:

1. $x - 3$.
2. $x + 2$.

Solución

1.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -4 & -7 & 10 & 3 \\ & 3 & -3 & -30 & \\ \hline 1 & -1 & -10 & -20 & \end{array}$$

Luego, el cociente es $x^2 - x - 10$ y el residuo es -20.

2. Como $x + 2 = x - (-2)$, en este caso el valor de a es -2.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -4 & -7 & 10 & -2 \\ & -2 & 12 & -10 & \\ \hline 1 & -6 & 5 & 0 & \end{array}$$

   Luego, el cociente es $x^2 - 6x + 5$ y el residuo es 0.

   Como la división es exacta, el dividendo es el producto de dos factores: el cociente y el divisor. Así,

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = \left(x^2 - 6x + 5\right)(x + 2).$$

Ejemplo 1.30

Determinar, usando división sintética, si $x + 1$ y $x - 2$ son factores del polinomio $2x^3 - 5x^2 + x + 2$.

Solución

Como en el ejemplo anterior, el divisor es factor del dividendo si la división es exacta.

1. Realicemos la división sintética de $2x^3 - 5x^2 + x + 2$ entre $x + 1$, teniendo en cuenta que como $x + 1 = x - (-1)$, en la casilla del divisor escribimos -1.

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -5 & 1 & 2 & -1 \\ & -2 & 7 & -8 & \\ \hline 2 & -7 & 8 & -6 & \end{array}$$

   Como el residuo es -6, la división no es exacta y entonces $x + 1$ no es factor de $2x^3 - 5x^2 + x + 2$.

2. Realicemos la división sintética de $2x^3 - 5x^2 + x + 2$ entre $x - 2$:

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -5 & 1 & 2 & 2 \\ & 4 & -2 & -2 & \\ \hline 2 & -1 & -1 & 0 & \end{array}$$

   Como el residuo es 0, la división es exacta y entonces $x - 2$ es factor de $2x^3 - 5x^2 + x + 2$. Luego,

$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = \left(2x^2 - x - 1\right)(x - 2).$$

Veremos ahora un resultado, conocido como teorema del residuo, que nos permite hallar el residuo de una división cuando el divisor es un polinomio de la forma $x - a$, con a un número, sin necesidad de recurrir a la división larga o a la división sintética.

1.12 Teorema del residuo

Empecemos, por ejemplo, dividiendo $x^5 - 2x^3 + x^2 - 5$ entre $x - 2$:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -5 & 2 \\ \cline{7-7} & 2 & 4 & 4 & 10 & 20 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 5 & 10 & 15 & \end{array}$$

El cociente de la división es $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 5x + 10$ y el residuo es 15.

Â¿Qué valor se obtiene si en el dividendo reemplazamos x por 2?

Veamos:

$$(2)^5 - 2(2)^3 + (2)^2 - 5 = 32 - 16 + 4 - 5 = 15,$$

que según el resultado de la división es el residuo.

Este resultado, que se cumple siempre, se conoce como **Teorema del Residuo**, cuyo enunciado es:

El residuo de dividir un polinomio en x entre $x - a$ se obtiene reemplazando en el polinomio la variable x por a.

Nótese que aplicando este teorema podemos hallar el residuo sin efectuar la división.

Ejemplo 1.31

Usando el teorema del residuo, hallar el residuo de dividir:

1. $z^4 - 2z^3 + 4z$ entre $z - 3$.
2. $-2w^3 - w + \dfrac{3}{4}$ entre $w - \dfrac{1}{2}$.

Solución

1. Aplicando el teorema del residuo, obtenemos el residuo de la división reemplazando z por 3 en el dividendo, así,

   $$3^4 - 2(3)^3 + 4(3) = 81 - 54 + 12 = 39.$$

   Luego, el residuo de dividir $z^4 - 2z^3 + 4z$ entre $z - 3$ es 39.

   Comprobamos este resultado usando división sintética:

   $$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ \cline{6-6} & 3 & 3 & 9 & 39 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 13 & 39 & \end{array}$$

   En efecto, el residuo es 39.

2. Aplicamos el teorema del residuo, reemplazando w por $\frac{1}{2}$ en el dividendo, así,

$$-2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 0.$$

Luego, el residuo de dividir $-2w^3 - w + \frac{3}{4}$ entre $w - \frac{1}{2}$ es 0.

Comprobamos este resultado usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} -2 & 0 & -1 & 3/4 & 1/2 \\ \hline & -1 & -1/2 & -3/4 & \\ \hline -2 & -1 & -3/2 & 0 & \end{array}$$

En efecto, el residuo de la división es 0.

Ejemplo 1.32

Empleando el teorema del residuo, hallar el residuo de dividir:

1. $2x^3 - 6x^2 + x - 5$ entre $x - 2$.
2. $x^3 + 2x^2 - x - 2$ entre $x + 1$.

Solución

1. El residuo de la división se obtiene reemplazando x por 2 en el dividendo. Así, el residuo es:

$$2(2)^3 - 6(2)^2 + 2 - 5 = 2(8) - 6(4) - 3 = 16 - 24 - 3 = -11.$$

Comprobamos este resultado usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -6 & 1 & -5 & 2 \\ & +4 & -4 & -6 & \\ \hline 2 & -2 & -3 & -11 & \end{array}$$

En efecto, el residuo es -11.

2. El teorema del residuo se aplica cuando el divisor es de la forma $x - a$, por lo que en este caso debemos escribir $x + 1$ como $x - (-1)$. Por tanto, para calcular el residuo reemplazamos x por -1 en el dividendo, así:

$$(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = -1 + 2 + 1 - 2 = 0.$$

Entonces, el residuo de dividir $x^3 + 2x^2 - x - 2$ entre $x + 1$ es 0. Comprobémoslo utilizando división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 2 & -1 & -2 & -1 \\ & -1 & -1 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

En efecto, el residuo de la división es 0.

Observación: Como la división es exacta,

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = \left(x^2 + x - 2\right)(x + 1).$$

Vemos que $x + 1$ es factor de $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Ejemplo 1.33

Emplear el teorema del residuo para determinar si $x - 1$ es un factor del polinomio

$$x^3 + 2x^2 - x - 2.$$

Solución

$x - 1$ es un factor del polinomio $x^3 + 2x^2 - x - 2$ si la división $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x - 1}$ es exacta, es decir, si el residuo de esta división es 0.

Aplicando el teorema del residuo, tenemos que dicho residuo es el resultado de reemplazar x por 1 en el dividendo:

$$1^3 + 2(1)^2 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0.$$

Como se obtuvo residuo 0, entonces $x - 1$ sí es un factor de $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Ejemplo 1.34

Hallar el residuo en las siguientes divisiones y comprobar el resultado usando división sintética:

1. $\dfrac{x^3 - 6x^2 - x + 30}{x - 3}$.
2. $\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x + 2}$.

Solución

1. El residuo es $3^3 - 6\,(3)^2 - 3 + 30 = 27 - 54 - 3 + 30 = 0$. Comprobemos el resultado usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -6 & -1 & 30 & \;3 \\ \cline{5-5} & 3 & -9 & -30 & \\ \hline 1 & -3 & -10 & 0 & \end{array}$$

   En efecto, el residuo es 0.

2. El residuo es $(-2)^2 - 3\,(-2) - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$. Comprobemos el resultado usando división sintética:

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -3 & -10 & \;-2 \\ \cline{4-4} & -2 & 10 & \\ \hline 1 & -5 & 0 & \end{array}$$

   En efecto, el residuo es 0.

   Nota: De la división sintética en 1. tenemos,

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = \left(x^2 - 3x - 10\right)(x - 3). \tag{1.1a}$$

De la división sintética en 2. tenemos,

$$x^2 - 3x - 10 = (x+5)(x+2). \tag{1.2a}$$

Como el cociente en (1.1a) es el dividendo en (1.2a), reemplazamos (1.2a) en (1.1a) y obtenemos:

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 - x + 30 &= \left(x^2 - 3x - 10\right)(x-3) \\ &= (x+5)(x+2)(x-3). \end{aligned}$$

Observamos en este ejemplo que, en ambos casos, obtuvimos residuo 0 y factorizamos el polinomio $x^3 - 6x^2 - x + 30$ usando el teorema del residuo y división sintética.

Veremos ahora otro resultado, llamado teorema del factor, muy importante en la factorización de algunos polinomios, en particular los de grado tres o más que no haya sido posible factorizarlos por los métodos anteriores.

1.13 Teorema del factor

Consideremos la división de un polinomio en la variable x entre $x-a$, con a un número.

Según el teorema del residuo, si sustituimos x por a en dicho polinomio, obtenemos el residuo de la división.

También sabemos que:

Si el residuo de la división es 0, entonces $x - a$ es un factor del polinomio.

Combinando los dos resultados anteriores obtenemos el **Teorema del Factor**, que se enuncia así:

Si al sustituir x por a en un polinomio en x, se obtiene 0, entonces $x - a$ es un factor del polinomio.

También es cierto el siguiente resultado:

Si al sustituir x por a en un polinomio en x, el resultado es diferente de 0, entonces $x - a$ no es un factor del polinomio.

Ejemplo 1.35

Utilizar el teorema del factor para determinar cuáles de los siguientes binomios son factores del polinomio $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$:

1. $x - 2$.
2. $x + 1$.
3. $x + 3$.

Solución

1. Sustituimos x por 2 en el polinomio, así,

$$2^4 + 2^3 - 5(2)^2 + 2 - 6 = 16 + 8 - 20 + 2 - 6 = 0.$$

   Luego, según el teorema del factor, $x - 2$ es un factor del polinomio.

2. Como $x + 1 = x - (-1)$, sustituimos x por -1 en el polinomio, así,

$$(-1)^4 + (-1)^3 - 5(-1)^2 + (-1) - 6 = 1 - 1 - 5 - 1 - 6 = -12.$$

   Como $-12 \neq 0$ entonces $x + 1$ no es factor del polinomio.

3. Como $x + 3 = x - (-3)$, sustituimos x por -3 en el polinomio, así,

$$(-3)^4 + (-3)^3 - 5(-3)^2 + (-3) - 6 = 81 - 27 - 45 - 3 - 6 = 0.$$

   Luego, $x + 3$ es factor del polinomio.

Nota: Como $x - 2$ y $x + 3$ son factores del polinomio, podemos afirmar que

$$x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)q$$

donde q es un cierto polinomio. Â¿Cómo hallar q?

$$q = \frac{x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6}{x^2 + x - 6}.$$

Si realizamos esta división obtenemos que,

$$q = x^2 + 1,$$

y así tenemos la factorización del polinomio:

$$x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)(x^2 + 1).$$

Vamos a aplicar el teorema del factor para factorizar algunos polinomios. Para ello necesitamos números tales que al sustituir la variable por ellos en el polinomio a factorizar, obtengamos 0. Esto se logra usando el siguiente resultado:

En un polinomio en una variable con coeficientes enteros y con 1 como coeficiente del término de mayor grado, **solamente** los factores del término independiente pueden ser los números que al reemplazar la variable por ellos, den como resultado 0.

Se llama **término independiente** en un polinomio en una variable, al término que no tiene la variable. Así, en el polinomio $x^3 + 2x^2 - x - 2$, el término independiente es -2.

Para factorizar un polinomio como el descrito en el resultado anterior, utilizando el teorema del factor, hacemos lo siguiente:

a) Encontramos los factores del término independiente.

b) Reemplazamos en el polinomio la variable x por un factor a del término independiente. Si el resultado es diferente de 0, entonces $x - a$ no es un factor del polinomio.

c) Continuamos con los siguientes factores del término independiente hasta encontrar uno para el cual el resultado sea 0. Si b es ese factor, entonces $x - b$ es un factor del polinomio.

d) Dividimos el polinomio entre $x - b$ utilizando división sintética.

e) Escribimos el polinomio como el producto de $x - b$ por el polinomio cociente obtenido en d).

f) Repetimos los pasos anteriores con el polinomio cociente para ver si es posible factorizarlo por este método.

g) Terminamos el proceso cuando el polinomio cociente obtenido en d) sea de grado 1 o ninguno de los factores de su término independiente lo haga 0.

Ejemplo 1.36

Factorizar, usando el teorema del factor, el polinomio

$$z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6.$$

Solución

El coeficiente del término de mayor grado es 1 y el término independiente es -6.

Los factores del término independiente -6 son: ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

Reemplazamos en el polinomio la variable z por cada factor del término independiente hasta obtener uno para el cual el resultado sea cero:

Si $z = 1$, $1^4 - 2(1)^3 - (1)^2 - 4(1) - 6 = -12 \neq 0$, entonces $z - 1$ no es factor de $z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6$.

Si $z = -1$, $(-1)^4 - 2(-1)^3 - (-1)^2 - 4(-1) - 6 = 0$, luego $z - (-1) = z + 1$ es factor de $z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6$.

Dividimos $z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6$ entre $z + 1$, usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -2 & -1 & -4 & -6 & -1 \\ & -1 & 3 & -2 & 6 & \\ \hline 1 & -3 & 2 & -6 & 0 & \end{array}$$

Luego,

$$z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6 = \left(z^3 - 3z^2 + 2z - 6\right)(z + 1). \tag{1.3a}$$

Repitamos el proceso anterior con el cociente $z^3 - 3z^2 + 2z - 6$.

Los factores del término independiente -6 son: ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

1 no hace 0 a $z^3 - 3z^2 + 2z - 6$, ya que no hace 0 a $z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6$.

Reemplazamos los otros factores de -6 en z^3-3z^2+2z-6 hasta obtener uno que lo haga 0:

Si $z=-1$, $(-1)^3-3(-1)^2+2(-1)-6=-12\neq 0$, entonces $z+1$ no es factor de z^3-3z^2+2z-6.

Si $z=2$, tenemos $2^3-3(2)^2+2(2)-6=-6\neq 0$, luego, $z-2$ no es factor.

Si $z=-2$, tenemos $(-2)^3-3(-2)^2+2(-2)-6=-30\neq 0$, luego, $z+2$ no es factor.

Si $z=3$, tenemos $3^3-3(3)^2+2(3)-6=0$, luego, $z-3$ es factor de z^3-3z^2+2z-6.

Dividimos z^3-3z^2+2z-6 entre $z-3$, así,

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -6 & 3 \\ \cline{5-5} & 3 & 0 & 6 & \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & \end{array}$$

Entonces,

$$z^3-3z^2+2z-6=\left(z^2+2\right)(z-3)\,. \tag{1.4a}$$

El término independiente del nuevo cociente z^2+2 es 2, y los factores de 2 son ±1 y ±2. Como ninguno de éstos hace 0 a z^2+2, entonces z^2+2 no es factorizable en los enteros.

Reemplazando (1.4a) en (1.3a) obtenemos la siguiente factorización del polinomio en el conjunto de los números enteros:

$$z^4-2z^3-z^2-4z-6=\left(z^3-3z^2+2z-6\right)(z+1)=\left(z^2+2\right)(z-3)(z+1)\,.$$

Nota: Como $z^2+2\neq 0$ para cualquier valor de z en los reales entonces, z^2+2 no es factorizable en los reales.

Ejemplo 1.37

Factorizar, usando el teorema del factor, el polinomio

$$x^4+x^3-2x^2-6x-4.$$

Solución

$x^4+x^3-2x^2-6x-4$ es un polinomio de grado 4 con el coeficiente del término de mayor grado igual a 1 y cuyo término independiente es -4.

Los factores del término independiente son ±1, ±2 y ±4.

Reemplazamos en el polinomio dado la variable x por cada factor del término independiente hasta obtener uno para el cual el resultado sea cero:

- Si $x=1$, $1^4+1^3-2(1)^2-6(1)-4=-10\neq 0$, entonces $x-1$ no es factor de $x^4+x^3-2x^2-6x-4$.
- Si $x=-1$, $(-1)^4+(-1)^3-2(-1)^2-6(-1)-4=0$, entonces $x-(-1)=x+1$ es factor de $x^4+x^3-2x^2-6x-4$.

Dividimos $x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4$ entre $x + 1$, usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -2 & -6 & -4 & -1 \\ \cline{6-6} & -1 & 0 & 2 & 4 & \\ \hline 1 & 0 & -2 & -4 & 0 & \end{array}$$

Luego,

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4 = \left(x^3 - 2x - 4\right)(x + 1)\,.$$

Repetimos el proceso anterior con el polinomio $x^3 - 2x - 4$:

Los factores del término independiente -4 son ± 1, ± 2 y ± 4.

Reemplazamos en $x^3 - 2x - 4$ la variable x por cada factor del término independiente hasta obtener uno para el cual el resultado sea cero:

- Como 1 no hace 0 al polinomio inicial $x^4+x^3-2x^2-6x-4$ tampoco hace 0 a x^3-2x-4.
- Si $x = -1$, $(-1)^3 - 2(-1) - 4 = -3 \neq 0$, entonces $x - (-1) = x + 1$ no es factor de $x^3 - 2x - 4$.
- Si $x = 2$, $2^3 - 2(2) - 4 = 0$, entonces $x - 2$ es factor de $x^3 - 2x - 4$.

Dividimos $x^3 - 2x - 4$ entre $x - 2$, usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ \cline{5-5} & 2 & 4 & 4 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

Luego, $x^3 - 2x - 4 = (x^2 + 2x + 2)(x - 2)\,.$

Repetimos nuevamente el proceso anterior con el polinomio $x^2 + 2x + 2$:

Los factores del término independiente 2 son ± 1, ± 2. Reemplacemos x por cada uno de estos factores hasta obtener uno para el cual el resultado sea cero:

- Como todos los términos del trinomio $x^2 + 2x + 2$ tienen signo $+$, descartamos los factores positivos de 2.
- Si $x = -1$, $(-1)^2 + 2(-1) + 2 = 1 \neq 0$, entonces $x - (-1) = x + 1$ no es factor de $x^2 + 2x + 2$.
- Si $x = -2$, $(-2)^2 + 2(-2) + 2 = 2 \neq 0$, entonces $x - (-2) = x + 2$ no es factor de $x^2 + 2x + 2$.

Luego, no hay un polinomio de la forma $x - a$, con a entero, que sea un factor de $x^2 + 2x + 2$. Esto es, $x^2 + 2x + 2$ no es factorizable en los enteros. Más adelante mostraremos que tampoco lo es en los reales. Luego, $x^2 + 2x + 2$ es un polinomio primo en los enteros y también en los reales.

Observemos además que si intentamos factorizar $x^2 + 2x + 2$ como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, no es posible hallar dos números cuyo producto sea 2 y su suma 2.

Por lo tanto, la factorización en los enteros obtenida para el polinomio dado es:

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4 = (x+1)(x-2)\left(x^2 + 2x + 2\right).$$

Finalmente, presentaremos una selección de ejercicios de factorización de polinomios, aplicando todos los temas vistos, pretendiendo con ello que el estudiante adquiera destreza para enfrentar este tipo de ejercicios.

1.14 Ejercicios

Algunas recomendaciones para factorizar un polinomio, teniendo en cuenta los temas de factorización estudiados, son:

- Primero observamos si todos los términos tienen un factor común. En caso afirmativo, sacamos el mayor factor común de los coeficientes y el factor común de mayor grado de la parte literal. Revisamos el segundo factor obtenido para ver si puede factorizarse de nuevo.
- Si los términos del polinomio dado no tienen un factor común, debemos tener en cuenta lo siguiente:
  - Cuando el polinomio dado sólo tiene dos términos:

    Si es la diferencia de dos cuadrados perfectos, lo factorizamos recordando que

    $$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

    Si es la suma de dos cuadrados perfectos, en algunos casos, la podemos convertir en un trinomio cuadrado perfecto para factorizarla.

    Si es la suma o la diferencia de dos cubos perfectos, lo factorizamos recordando que

    $$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$
    $$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

  - Cuando el polinomio dado es un trinomio:

    Si es un trinomio cuadrado perfecto, lo factorizamos recordando que

    $$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

    Si no es un trinomio cuadrado perfecto, analizamos si es posible convertirlo en un trinomio cuadrado perfecto.

    Si es un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, vemos si es posible hallar dos números p y q tales que su producto sea c y su suma sea b y así

    $$x^2 + bx + c = x + p)(x+q).$$

Si es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 1$, vemos si es posible hallar cuatro números p, q, r y s tales que el producto de p y q sea igual a a, el producto de r y s sea igual a c y $ps + rq$ sea igual a b y así

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s).$$

– Cuando el polinomio a factorizar tiene tres o más términos y no es posible factorizarlo teniendo en cuenta las recomendaciones anteriores, procedemos así:

Debemos analizar los términos y tratar de **agruparlos adecuadamente** para obtener, en algunos casos, un factor común, una diferencia de cuadrados o una suma o diferencia de cubos.

Si el polinomio tiene cuatro términos analizamos si cumplen las condiciones para ser el cubo de un binomio y en caso afirmativo lo factorizamos recordando que

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3.$$

Si el polinomio es de grado tres o más y el coeficiente del término de mayor grado es 1, vemos si es posible factorizarlo utilizando el teorema del factor, analizando los factores de su término independiente para ver si al sustituir la variable por ellos se obtiene cero.

Ejemplo 1.38

Factorizar:

1. $3x^3 - 15x^2 + 9x$.
2. $4x^5 - 12x^4 - 16x^3 + 48x^2$.
3. $64x^8 + y^8$.
4. $(y-1)^2(y+2) - (y-1)(y+2)^2$.
5. $x^3 - 39x + 70$.
6. $12d^2 - 31dh + 9h^2$.
7. $1 + \frac{2}{3}b + \frac{b2}{9}$.
8. $27a^{15}b^{12} + 216$.
9. $x^{17} - x$.
10. $3x^2 - 31x + 56$.

Solución

1. El mayor factor común de los coeficientes 3, -15 y 9 es 3, y x es el único factor común literal. Tenemos así,

$$3x^3 - 15x^2 + 9x = 3x(x^2 - 5x + 3).$$

El polinomio entre paréntesis es de la forma $x^2 + bx + c$. Al tratar de factorizarlo vemos que no es posible hallar dos números enteros cuyo producto sea 3 y su suma -5. Luego, $x^2 - 5x + 3$ no es factorizable en los enteros.

2. Como 4 es el mayor factor común de los coeficentes y x^2 es el único factor común literal entonces
$$4x^5 - 12x^4 - 16x^3 + 48x^2 = 4x^2 \left(x^3 - 3x^2 - 4x + 12\right).$$
Si en el polinomio entre paréntesis agrupamos los dos primeros términos y los dos últimos obtenemos:
$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 4x + 12 &= \left(x^3 - 3x^2\right) - (4x - 12) \\ &= x^2 (x-3) - 4(x-3) && \text{Factor común en cada paréntesis} \\ &= (x-3)\left(x^2 - 4\right) && \text{Factor común } x-3 \\ &= (x-3)(x+2)(x-2) && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados.} \end{aligned}$$
Luego,
$$4x^5 - 12x^4 - 16x^3 + 48x^2 = 4x^2 (x-3)(x+2)(x-2).$$

3. Como $64x^8 + y^8 = (8x^4)^2 + (y^4)^2$ es una suma de cuadrados, podemos completar un trinomio cuadrado perfecto sumando un término igual a $2(8x^4)(y^4) = 16x^4y^4$, y para que el polinomio dado no varíe restamos ese mismo término.
$$\begin{aligned} 64x^8 + y^8 &= 64x^8 + y^8 + 16x^4y^4 - 16x^4y^4 && \text{Sumamos y restamos } 16x^4y^4 \text{ Luego,} \\ &= (64x^8 + 16x^4y^4 + y^8) - 16x^4y^4 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos} \\ &= (8x^4 + y^4)^2 - \left(4x^2y^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\ &= [(8x^4 + y^4) + 4x^2y^2][(8x^4 + y^4) - 4x^2y^2] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\ &= (8x^4 + 4x^2y^2 + y^4)(8x^4 - 4x^2y^2 + y^4) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } x. \end{aligned}$$
$$64x^8 + y^8 = (8x^4 + 4x^2y^2 + y^4)(8x^4 - 4x^2y^2 + y^4).$$

4. Como $(y-1)(y+2)$ es el factor común de mayor grado entonces
$$\begin{aligned} (y-1)^2 (y+2) - (y-1)(y+2)^2 &= (y-1)(y+2)[(y-1) - (y+2)] \\ &= (y-1)(y+2)(-3) \\ &= -3(y-1)(y+2). \end{aligned}$$
Luego,
$$(y-1)^2 (y+2) - (y-1)(y+2)^2 = -3(y-1)(y+2).$$

5. Observemos que $x^3 - 39x + 70$ es un trinomio que no tiene un factor común y para el cual la mayor potencia de x no es par. Por tanto, no puede factorizarse por ninguno de los casos que hacen referencia a trinomios. Como el coeficiente de la mayor potencia de la variable es 1, utilicemos el teorema del factor para tratar de factorizarlo.

Recordemos que en un polinomio con coeficientes enteros y con 1 como coeficiente del término de mayor grado, sus posibles factores de la forma $x - a$ pueden ser solamente aquellos para los cuales a es un factor del término independiente.

Los factores del término independiente, 70, son: ± 1, ± 2, ± 5, ± 7 y ± 70.

Reemplazamos en el polinomio dado la variable x por cada factor del término independiente hasta obtener uno para el cual el resultado sea cero:

- Si $x = 1$, $1^3 - 39(1) + 70 = 32 \neq 0$, entonces $x - 1$ no es factor de $x^3 - 39x + 70$.
- Si $x = -1$, $(-1)^3 - 39(-1) + 70 = 108 \neq 0$, entonces $x - (-1) = x + 1$ no es factor de $x^3 - 39x + 70$.
- Si $x = 2$, $2^3 - 39(2) + 70 = 0$, entonces $x - 2$ es factor de $x^3 - 39x + 70$.

Dividimos $x^3 - 39x + 70$ entre $x - 2$, usando división sintética, para hallar el segundo factor:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -39 & 70 & 2 \\ & 2 & 4 & -70 & \\ \hline 1 & 2 & -35 & 0 & \end{array}$$

Luego,

$$x^3 - 39x + 70 = \left(x^2 + 2x - 35\right)(x - 2).$$

Podemos repetir el proceso anterior con el cociente $x^2 + 2x - 35$. Pero observemos que éste es un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y 7 y -5 son dos números cuyo producto es -35 y su suma es 2. Así, $x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$ y por lo tanto,

$$x^3 - 39x + 70 = (x - 2)(x + 7)(x - 5).$$

6. $12d^2 - 31dh + 9h^2$ es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a = 12$, $b = -31h$ y $c = 9h^2$. Como 3 y 4 son dos números cuyo producto es 12, -9 y -1 son dos números cuyo producto es 9 y como $-31 = 3(-9) + 4(-1)$ entonces,

$$12d^2 - 31dh + 9h^2 = (3d - h)(4d - 9h).$$

7. $1 + \frac{2}{3}b + \frac{b^2}{9}$ es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$1 = 1^2 \quad , \quad \frac{b^2}{9} = \left(\frac{b}{3}\right)^2 \quad \text{y} \quad \frac{2}{3}b = 2(1)\left(\frac{b}{3}\right).$$

Luego,

$$1 + \frac{2}{3}b + \frac{b^2}{9} = \left(1 + \frac{1}{3}b\right)^2.$$

8. $27a^{15}b^{12} + 216 = (3a^5b^4)^3 + 6^3$ es una suma de cubos y por tanto,

$$27a^{15}b^{12} + 216 = (3a^5b^4 + 6)(9a^{10}b^8 - 18a^5b^4 + 36).$$

9. $x^{17}-x=x(x^{16}-1)$ Sacamos factor común x

$$
\begin{aligned}
&= x(x^8+1)(x^8-1) && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= x(x^8+1)(x^4+1)(x^4-1) && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= x(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1) && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= x(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1) && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados.}
\end{aligned}
$$

10. $3x^2-31x+56$ es un trinomio de la forma ax^2+bx+c con $a=3$, $b=-31$ y $c=56$. Como 3 y 1 son dos números cuyo producto es 3, -7 y -8 son dos números cuyo producto es 56 y $-31=3(-8)+1(-7)$ entonces,

$$3x^2-31x+56=(3x-7)(x-8).$$

Ejemplo 1.39

Factorizar:

1. $4x^2-12ax-z^2-c^2-2cz+9a^2$.
2. x^6-y^6.
3. $x^7+x^4-16x^3-16$.
4. y^5-2y^2-9y-6.
5. y^4+7y^2+12.
6. $s^2t^2-2st^3-63t^4$.
7. $125x^3-525x^2y+735xy^2-343y^3$.
8. $25\,(x+1)^2-30\,(x+1)+9$.
9. $4x^4+9y^4-93x^2y^2$.
10. $90x^2y-108x^4y^4z^2-162x^3y^2z^2$.

Solución

1. Observando el polinomio $4x^2-12ax-z^2-c^2-2cz+9a^2$ vemos que si agrupamos los términos que tienen las letras x ó a, éstos forman un trinomio cuadrado perfecto. Lo mismo sucede si agrupamos, en un paréntesis precedido de signo menos, los términos que tienen las letras z ó c. Así,

$$
\begin{aligned}
&4x^2-12ax-z^2-c^2-2cz+9a^2\\
&= \left(4x^2-12ax+9a^2\right)-\left(z^2+2cz+c^2\right) && \text{Ordenamos y agrupamos términos}\\
&= (2x-3a)^2-(z+c)^2 && \text{Factorizamos los trinomios}\\
&= [(2x-3a)+(z+c)]\,[(2x-3a)-(z+c)] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= (2x-3a+z+c)\,(2x-3a-z-c)\,.
\end{aligned}
$$

2. Como 6 es divisible por 2 y por 3, este ejercicio se puede empezar a resolver como una diferencia de cuadrados o una diferencia de cubos. Si expresamos $x^6 = (x^3)^2$ y $y^6 = (y^3)^2$ tenemos que $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2$ es una diferencia de cuadrados. Si expresamos $x^6 = (x^2)^3$ y $y^6 = (y^2)^3$ tenemos que $x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3$ es una diferencia de cubos. Por cualesquiera de las dos formas de expresión, el resultado final debe ser igual. Vamos a trabajarlo como diferencia de cuadrados.

$x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2$	Diferencia de cuadrados
$= (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$	Factorizamos la diferencia de cuadrados
$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$	Factorizamos suma y diferencia de cubos.

Hacer el ejercicio expresando el polinomio inicial como una diferencia de cubos.

3.
$$\begin{aligned} x^7 + x^4 - 16x^3 - 16 &= (x^7 + x^4) + (-16x^3 - 16) \\ &= x^4(x^3 + 1) - 16(x^3 + 1) \\ &= (x^3 + 1)(x^4 - 16) \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 4)(x^2 - 4) \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2). \end{aligned}$$

4. Observemos que $y^5 - 2y^2 - 9y - 6$ es un polinomio con cuatro términos que no cumple las condiciones para ser el cubo de un binomio. Además no es posible agrupar sus términos de tal manera que se obtenga un factor común. Pero, $y^5 - 2y^2 - 9y - 6$ es un polinomio de grado 5 con el coeficiente del término de mayor grado igual a 1 y cuyo término independiente es -6. Utilicemos el teorema del factor para factorizarlo:

   Los factores del término independiente -6 son ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

   Reemplazamos los factores de -6 en $y^5 - 2y^2 - 9y - 6$ hasta obtener uno que lo haga cero:

   - Si $y = 1$, $1^5 - 2(1)^2 - 9(1) - 6 = -16 \neq 0$, entonces $y - 1$ no es factor de $y^5 - 2y^2 - 9y - 6$.
   - Si $y = -1$, $(-1)^5 - 2(-1)^2 - 9(-1) - 6 = 0$, entonces $y - (-1) = y + 1$ es factor de $y^5 - 2y^2 - 9y - 6$.

   Dividimos $y^5 - 2y^2 - 9y - 6$ entre $y + 1$, usando división sintética, para hallar el segundo factor:

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 & -9 & -6 & -1 \\ & -1 & 1 & -1 & 3 & 6 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & -3 & -6 & 0 & \end{array}$$

   Luego,

$$y^5 - 2y^2 - 9y - 6 = \left(y^4 - y^3 + y^2 - 3y - 6\right)(y + 1).$$

Repetimos el proceso anterior con el polinomio cociente $y^4 - y^3 + y^2 - 3y - 6$:

Los factores del término independiente -6 son ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

Reemplazamos los factores de -6 en $y^4 - y^3 + y^2 - 3y - 6$ hasta obtener uno que lo haga cero:

- Como 1 no hace 0 al polinomio inicial $y^5 - 2y^2 - 9y - 6$ tampoco hace 0 a $y^4 - y^3 + y^2 - 3y - 6$.
- Si $y = -1$, $(-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) - 6 = 0$, entonces $y - (-1) = y + 1$ es factor de $y^4 - y^3 + y^2 - 3y - 6$.

Dividimos $y^4 - y^3 + y^2 - 3y - 6$ entre $y + 1$, usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & -3 & -6 & -1 \\ & -1 & 2 & -3 & 6 & \\ \hline 1 & -2 & 3 & -6 & 0 & \end{array}$$

Luego, $y^4 - y^3 + y^2 - 3y - 6 = (y^3 - 2y^2 + 3y - 6)(y + 1)$.

Repetimos de nuevo el proceso para factorizar a $y^3 - 2y^2 + 3y - 6$. Pero, si observamos este polinomio vemos que agrupando los dos primeros términos y los dos últimos se obtiene un factor común $y - 2$, así,

$$y^3 - 2y^2 + 3y - 6 = \left(y^3 - 2y^2\right) + (3y - 6) = y^2(y - 2) + 3(y - 2) = (y - 2)\left(y^2 + 3\right).$$

Como $y^2 + 3 \neq 0$ para cualquier valor de y en los reales, porque $y^2 + 3$ es siempre un número positivo, entonces $y^2 + 3$ no es factorizable en los reales.

Luego, la factorización en los enteros del polinomio $y^5 - 2y^2 - 9y - 6$ es:

$$y^5 - 2y^2 - 9y - 6 = (y + 1)(y + 1)(y - 2)\left(y^2 + 3\right) = (y + 1)^2(y - 2)\left(y^2 + 3\right).$$

5. Como $y^4 + 7y^2 + 12 = \left(y^2\right)^2 + 7\left(y^2\right) + 12$, es un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ con y^2 en lugar de x, debemos hallar dos números cuyo producto sea 12 y su suma sea 7. Estos números son 4 y 3. Luego,

$$y^4 + 7y^2 + 12 = \left(y^2\right)^2 + 7\left(y^2\right) + 12 = (y^2 + 4)(y^2 + 3).$$

6. El factor común literal de mayor grado es t^2. Por tanto,

$$s^2t^2 - 2st^3 - 63t^4 = t^2(s^2 - 2st - 63t^2).$$

El polinomio entre paréntesis es de la forma $s^2 + bs + c$ con $b = -2t$ y $c = -63t^2$. Como -9 y 7 son dos números cuyo producto es -63 y su suma -2 entonces $s^2 - 2st - 63t^2 = (s - 9t)(s + 7t)$. Luego,

$$s^2t^2 - 2st^3 - 63t^4 = t^2(s - 9t)(s + 7t).$$

7. Veamos si este polinomio cumple las condiciones para ser el cubo de un binomio: tiene cuatro términos con signos alternadamente positivos y negativos, $125x^3$ es un cubo perfecto porque $125x^3 = (5x)^3$, $343y^3$ es un cubo perfecto porque $343y^3 = (7y)^3$, $3(5x)^2(7y) = 525x^2y$ es el segundo término y $3(5x)(7y)^2 = 735xy^2$ es el tercer término. Se cumplen las condiciones y por tanto,

$$125x^3 - 525x^2y + 735xy^2 - 343y^3 = (5x - 7y)^3.$$

8. Como $25\,(x+1)^2 = [5(x+1)]^2$, $9 = 3^2$ y $30\,(x+1) = 2\,[5(x+1)]\,(3)$ entonces $25\,(x+1)^2 - 30\,(x+1) + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto. Luego,

$$25\,(x+1)^2 - 30\,(x+1) + 9 = [5(x+1) - 3])^2 = (5x+2)^2\,.$$

9. $4x^4 + 9y^4 - 93x^2y^2 = 4x^4 - 93x^2y^2 + 9y^4$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque $4x^4 = \left(2x^2\right)^2$, $9y^4 = \left(3y^2\right)^2$ y $2(2x^2)(3y^2) = 12x^2y^2 \neq 93x^2y^2$.

   Se tendría un trinomio cuadrado perfecto si el segundo término fuera $-12x^2y^2$ y una manera de obtenerlo es descomponer $-93x^2y^2$ como $-12x^2y^2 - 81x^2y^2$. Así,

$$\begin{aligned}
&4x^4 + 9y^4 - 93x^2y^2 \\
&\quad = 4x^4 + 9y^4 - 12x^2y^2 - 81x^2y^2 && \text{Descomponemos } -93x^2y^2 \\
&\quad = \left(4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4\right) - 81x^2y^2 && \text{Reorganizamos y agrupamos términos} \\
&\quad = \left(2x^2 - 3y^2\right)^2 - (9xy)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\
&\quad = \left[\left(2x^2 - 3y^2\right) + 9xy\right]\left[\left(2x^2 - 3y^2\right) - 9xy\right] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&\quad = \left(2x^2 + 9xy - 3y^2\right)\left(2x^2 - 9xy - 3y^2\right) && \text{Ordenamos cada factor respecto} \\
& && \text{a la letra } x.
\end{aligned}$$

   Así,

$$4x^4 + 9y^4 - 93x^2y^2 = \left(2x^2 + 9xy - 3y^2\right)\left(2x^2 - 9xy - 3y^2\right).$$

10. En $90x^2y - 108x^4y^4z^2 - 162x^3y^2z^2$ el factor común literal de mayor grado es x^2y. Hallemos el mayor factor común de los coeficientes descomponiendo 90, 108 y 162 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l}
90 & 2 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
108 & 2 \\
54 & 2 \\
27 & 3 \\
9 & 3 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
162 & 2 \\
81 & 3 \\
27 & 3 \\
9 & 3 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}$$

   Como $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$ y $162 = 2 \cdot 3^4$ entonces el mayor factor común de los coeficientes es $2 \cdot 3^2 = 18$. Luego,

$$90x^2y - 108x^4y^4z^2 - 162x^3y^2z^2 = 18x^2y\left(5 - 6x^2y^3z^2 - 9xyz^2\right).$$