Red Matemática Antioquia

Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las matemáticas en Antioquia

2012 - 2015

Antioquia la más educada

facebook.com/RedMatematicaAntioquia

@redmatematicant

redmatematica@antioquia.gov.co

NOCIONES DE ÁLGEBRA

Autoras

Beatriz Elena Correa Restrepo

Luz Elena Muñoz Sierra

Celia Villegas de Arias

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLÍN

Tabla de Contenido

Lección **Página**

Prefacio

Mejorar la enseñanza de las Matemáticas siempre es un reto. Los conceptos matemáticos llevan en sí mismos cierta complejidad, pero si le sumamos a ésta un texto demasiado denso, con terminología extraña y que no distinga qué es lo verdaderamente importante a enseñar, el resultado termina siendo catastrófico.

El presente texto de 20 lecciones ha sido escrito para un curso de formación de docentes en Álgebra y hace parte de una versión completa de 90 lecciones de Álgebra, que serían utilizadas como guías de clase por los maestros del departamento de Antioquia en los grados 8 y 9 de la educación secundaria. Este trabajo ha sido elaborado dentro del programa “Antioquia la más Educada”, liderado por el Gobernador Sergio Fajardo Valderrama, y su objetivo es hacer una exposición lo más clara posible de las nociones matemáticas básicas que deberían ser conocidas por un bachiller antes de su ingreso a la universidad. Para ello hemos reducido la terminología matemática a la estrictamente necesaria y hemos prescindido de temas accesorios, que consideramos no son esenciales para la formación matemática de los estudiantes y que por el contrario pueden despertar en ellos un rechazo al estudio de las Matemáticas. De esta manera esperamos que este material contribuya a mejorar la percepción, entre los estudiantes, de la importancia de las Matemáticas y de su inmenso poder en la solución de problemas concretos, tanto de las ciencias naturales como de la vida cotidiana.

Comité Editorial

Prólogo

Cuando nos invitaron a participar en el programa “Antioquia la más Educada”, para escribir unas clases de Álgebra, para un curso de formación de docentes, pensamos que dada nuestra experiencia como profesoras de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, en los primeros cursos de Matemáticas, podíamos aportar nuestro grano de arena para apoyar al mejoramiento de la calidad de la enseñanza de las Matemáticas en Antioquia.

Conocemos ampliamente los problemas que enfrentan los estudiantes en sus primeros cursos de Matemáticas en la universidad, y aunque sabemos que hay muchas causas que inciden en su bajo rendimiento, una de ellas es su desconocimiento o mal manejo de los conceptos y herramientas del Álgebra Elemental, indispensables para un buen desempeño en los cursos universitarios.

Con base en lo anterior, seleccionamos algunos de los temas que consideramos básicos para trabajar en estas clases y nos impusimos el reto de escribirlos en la forma más clara posible desde el punto de vista conceptual, acompañándolos de ejemplos ilustrativos de cada tema, que desarrollamos al detalle explicando cada uno de los pasos. Además, diseñamos 13 talleres con sus respectivas soluciones que complementan el trabajo de las clases.

Para el trabajo consultamos textos clásicos utilizados desde hace muchos años tanto en la educación básica y media como en la universitaria, además de material complementario escrito por profesores de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, para los cursos básicos.

Aunque sólo cubrimos algunos temas del Álgebra, pues este no es un curso regular para un año lectivo escolar, esperamos que los temas que trabajamos sean útiles a los docentes de Matemáticas y a los estudiantes de las Escuelas Normales, quienes se están preparando para su incursión en el mundo de la docencia.

Las autoras

Lección 1

Terminología básica

En **Aritmética** trabajamos con números. En **Álgebra**, además de los números, trabajamos con letras que representan números. Con números y letras realizamos operaciones como si se tratara sólo de números.

Las operaciones fundamentales del Álgebra, u operaciones algebraicas, son: suma o adición, resta o sustracción, multiplicación y división.

Una **expresión algebraica** es una expresión que consta de símbolos (números o letras) conectados mediante signos de operaciones. Las operaciones utilizadas son, además de las fundamentales del Álgebra, la potenciación y la radicación. Por ejemplo, las siguientes son expresiones algebraicas:

$$b \quad , \quad -2x \quad , \quad a(w-z) \quad , \quad \frac{2a-3b^2}{c+5}.$$

Para trabajar con expresiones algebraicas nos referiremos a continuación al significado de expresiones de la forma a^n, con n un número entero positivo, y a las leyes para realizar operaciones entre ellas y simplificar resultados.

Recordemos con unos ejemplos el uso de exponentes en Aritmética:

Ejemplo 1.1

1. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$.
2. $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$.
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.
4. $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

Observamos que una potencia de un número, con exponente entero positivo, es una forma abreviada de expresar un producto del número por sí mismo, tantas veces como lo indique el exponente. Igual ocurre si en lugar de un número tenemos una expresión algebraica a:

El producto $a \cdot a$ se escribe $\boldsymbol{a^2}$ y se lee ***a* al cuadrado**.

El producto $a \cdot a \cdot a$ se escribe $\boldsymbol{a^3}$ y se lee ***a* al cubo**.

En general, si n es un número **entero positivo**, el producto $a \cdot a \cdots a$ se denota a^n,

donde n indica el número de veces que se repite el factor a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}.$$

$\boldsymbol{a^n}$ se llama la **$\boldsymbol{n}$-ésima potencia de $\boldsymbol{a}$** y se lee **$\boldsymbol{a}$ a la $\boldsymbol{n}$**. La expresión $\boldsymbol{a}$ se llama **base** y $\boldsymbol{n}$ se llama **exponente**.

Ejemplo 1.2

1. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
2. $(a+1)^3 = (a+1)(a+1)(a+1)$.
3. $(a+3b)^4 = (a+3b)(a+3b)(a+3b)(a+3b)$.

Ejemplo 1.3

Escribir cada una de las expresiones siguientes en la forma a^n, con n un entero positivo.

1. a^3a^4.
2. $(a^4)^3$.
3. $\dfrac{a^5}{a^2}$ con $a \neq 0$.

Solución

1. $a^3a^4 = (a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^7$.
2. $(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{12}$.
3. $\dfrac{a^5}{a^2} = \dfrac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = \dfrac{a}{a}.\dfrac{a}{a} \cdot a \cdot a \cdot a = 1 \cdot 1 \cdot a \cdot a \cdot a = 1 \cdot a^3 = a^3$.

Las siguientes propiedades, conocidas como **leyes de los exponentes**, nos permiten realizar las operaciones con potencias de una manera más sencilla.

Leyes de los exponentes

Sean a y b expresiones algebraicas y m y n números enteros positivos. Entonces:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

   El producto de potencias que tienen la misma base es una potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes de las potencias dadas.

2. Si $a \neq 0$ y m es mayor que n, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

   Si m es un número mayor que n, el cociente de potencias que tienen la misma base es una potencia con la misma base y y cuyo exponente es la diferencia entre el exponente del numerador y el exponente del denominador.

3. $(a^m)^n = a^{mn}$.

   Una potencia elevada a un exponente da como resultado una potencia con la base inicial elevada al producto de los dos exponentes.

4. $(ab)^n = a^n b^n$.

   La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de cada uno de los factores.

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, con $b \neq 0$.

   La potencia de un cociente es igual al cociente de la potencia del numerador entre la potencia del denominador.

Usando la definición, veamos el por qué de algunas de estas leyes:

1. $a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{aa\ldots a}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ factores}}}_{m+n \text{ factores}} = a^{m+n}$.

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\dfrac{a}{b}\dfrac{a}{b}\cdots\dfrac{a}{b}}_{n \text{ factores}} = \dfrac{\overbrace{aa\ldots a}^{n \text{ factores}}}{\underbrace{bb\ldots b}_{n \text{ factores}}} = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Intente justificar las otras tres leyes.

Ejemplo 1.4

1. $5^3 \cdot 5^6 = 5^{3+6} = 5^9$.

2. $\dfrac{4^7}{4^2} = 4^{7-2} = 4^5$.

3. $(7^6)^3 = 7^{6\cdot 3} = 7^{18}$.

4. $(5 \cdot 8)^4 = 5^4 8^4$.

5. $\left(\dfrac{2}{x}\right)^4 = \dfrac{2^4}{x^4}, \ \ x \neq 0$.

6. $\dfrac{2w^5}{w^2} = 2 \cdot \dfrac{w^5}{w^2} = 2w^{5-2} = 2w^3, \ \ w \neq 0$.

7. $$\begin{aligned}\left(4a^4b^3\right)^2\left(5a^2b^5\right) &= \left(4^2\left(a^4\right)^2\left(b^3\right)^2\right)\left(5a^2b^5\right)\\ &= \left(16a^8b^6\right)\left(5a^2b^5\right)\\ &= (16)(5)a^8a^2b^6b^5\\ &= 80a^{10}b^{11}.\end{aligned}$$

8. $\dfrac{4x^3y^7}{5x^2y^5} = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{x^3}{x^2} \cdot \dfrac{y^7}{y^5} = \dfrac{4}{5} \cdot x^{3-2} \cdot y^{7-5} = \dfrac{4}{5}xy^2, \ x \neq 0, \ y \ \neq 0$.

Exponente cero y exponentes enteros negativos

Las potencias con exponente 0 y exponentes enteros negativos se definen de modo que las leyes de los exponentes antes enunciadas, se mantengan válidas cualesquiera sean los enteros m y n.

Por ejemplo, para que la segunda ley sea válida cuando $m = n$, es obligatorio definir $a^0 = 1$. Tenemos por lo tanto la siguiente definición:

$$a^0 = 1 \qquad , \qquad a \neq 0.$$

La expresión 0^0 no está definida[1].

Por otra parte, para que la misma ley sea válida con $m = 0$ y n entero positivo, debe tenerse, para $a \neq 0$,

$$\frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

y como $a^0 = 1$, entonces debe ser $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Con base en esto se define

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad n \text{ entero positivo y } a \neq 0.$$

Se sigue de la anterior definición, que $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$.

Tenemos así definidas las potencias para cualquier exponente entero (positivo, cero o negativo). Se puede comprobar que efectivamente, las leyes de los exponentes continúan siendo válidas cualesquiera sean los enteros m y n.

Ejemplo 1.5

1. $(-2)^0 = 1$.
2. $5y^{-3} = 5 \cdot \dfrac{1}{y^3} = \dfrac{5}{y^3}$.
3. $\dfrac{7^{-6}}{7^{-2}} = 7^{-6-(-2)} = 7^{-4} = \dfrac{1}{7^4}$.

[1] Un argumento que ayuda a entender por qué 0^0 no está definida es el siguiente: Puesto que $0^n = 0$ para todo número positivo n, sería natural definir $0^0 = 0$; pero por otro lado, como $a^0 = 1$ para $a \neq 0$, también sería natural definir $0^0 = 1$. Luego, no hay un único valor que resulte natural para 0^0.

Lección 2

Polinomios

Expresiones algebraicas como

$$7x^2 - 3x \quad , \quad x^3 + 2x + 8 \quad , \quad 2x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 5x^2$$

se conocen como polinomios en la letra o variable x. Observamos que cada uno de ellos es una suma de expresiones del tipo ax^k, con a un número real y k un entero positivo o cero[1].

En general, una suma de expresiones del tipo ax^k, con a un número real y k un entero positivo o cero, se llama **polinomio en x** o **polinomio en la variable x**. En lugar de la letra x se puede usar cualquier otra letra.

Ejemplo 2.1

1. $3x + 1$ es un polinomio en x.
2. $2y^3 + (-5)\,y + 4$ es un polinomio en y, que usualmente escribimos como $2y^3 - 5y + 4$.
3. $3z^5 + \dfrac{2}{z+1}$ no es un polinomio porque $\dfrac{2}{z+1}$ no es de la forma az^k, con a número real y k entero positivo o cero.
4. $\sqrt{3}x + \dfrac{1}{2}x^2$ es un polinomio en la variable x.

En un polinomio en x, cada una de las expresiones ax^k se llama **término** del polinomio. Al número a se le conoce como **coeficiente numérico** o simplemente **coeficiente** del término ax^k; el **signo** del término ax^k es el signo que tenga el coeficiente a. El **grado** del término es el exponente de la variable, si el coeficiente es diferente de cero. Por ejemplo, el grado de $7x^2$ es 2, mientras que el de 8 es 0, viendo 8 como $8x^0$.

Ejemplo 2.2

1. El polinomio $4x^2 + (-15)\,x + 25$, que escribimos simplemente como $4x^2 - 15x + 25$, tiene 3 términos con las siguientes características:

[1] Convenimos en ver el sumando 8 en el polinomio $x^3 + 2x + 8$, como si fuese $8x^0$. En general, convenimos que en cualquier polinomio, un sumando que sea un número a, se verá como si fuese ax^0.

Término	**Signo**	**Coeficiente**	**Grado**
$4x^2$	positivo $(+)$	4	2
$-15x$	negativo $(-)$	-15	1
25	positivo $(+)$	25	0

2. En el polinomio $2x^5 + 5x^3 + \left(-\dfrac{3}{4}\right) x + 5$, que escribimos como $2x^5 + 5x^3 - \dfrac{3}{4}x + 5$, sus términos tienen las siguientes características:

Término	**Signo**	**Coeficiente**	**Grado**
$2x^5$	positivo $(+)$	2	5
$5x^3$	positivo $(+)$	5	3
$-\dfrac{3}{4}x$	negativo $(-)$	$-\dfrac{3}{4}$	1
5	positivo $(+)$	5	0

Un polinomio que consta de un solo término se llama **monomio,** de dos términos **binomio** y de tres términos **trinomio.** Los monomios del tipo a, donde a es un número, se conocen como **polinomios constantes**.

Ejemplo 2.3

4 y -9 son polinomios constantes.

$2x^3$ y $-3y$ son monomios.

$3x^2 - 5$ y $z^3 + 2z$ son binomios.

$6x^2 - 5x + 4$ y $3x^4 - 2x^2 + x$ son trinomios.

El **grado** de un polinomio en una variable es el del término de mayor grado del polinomio. Por ejemplo, el grado de $4x^2 - 15x + 25$ es 2, el de $2x^5 + 5x^3 - \dfrac{3}{4}x + 5$ es 5 y el del polinomio constante 4 es 0.

Al polinomio constante 0, llamado **polinomio cero**, no se le asigna ningún grado.

También podemos considerar polinomios en más de una variable. Por ejemplo, $x^2 + xy + y^3$ es un polinomio en las variables x y y. Similarmente, $2x^4y^2z^2 - 5x^2y + 3yz$ es un polinomio en las variables x, y y z. En estos casos el grado del polinomio se considera con respecto a cada una de las variables. Así, por ejemplo, el polinomio $x^2 + xy + y^3$ es de grado 2 con respecto a x y de grado 3 con respecto a y. De igual manera, el polinomio $2x^4y^2z^2 - 5x^2y + 3yz$ es de grado 4 con respecto a x, de grado 2 con respecto a y y de grado 2 con respecto a z.

En la próximas lecciones vamos a estudiar las operaciones fundamentales del Álgebra con polinomios, para lo cual es necesario el concepto y manejo de términos semejantes y símbolos de agrupación.

Términos semejantes

En cada término de un polinomio, a las variables con sus exponentes se les conoce como **parte literal** del término. Por ejemplo, en el polinomio $-4x^2y^3 + 5xy^2 + 3$, la parte literal del término $-4x^2y^3$ es x^2y^3, la parte literal del término $5xy^2$ es xy^2 y para el último término 3 diremos que no tiene parte literal.

Decimos que dos o más términos son **términos semejantes** si tienen la misma parte literal. Así, por ejemplo, $7xy$ y $-3xy$ son términos semejantes, pero $-2w^2z^3$ y $5w^2z$ no lo son. Dos o más términos constantes se consideran semejantes.

Agrupar o reducir términos semejantes en un polinomio es convertir todos los términos semejantes en un solo término (semejante a ellos). El coeficiente de dicho término se obtiene realizando las sumas o restas de los coeficientes numéricos de los términos a reducir.

Para reducir términos semejantes y para realizar las operaciones fundamentales entre polinomios, aplicaremos las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y el producto de números reales, y la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma:

Si a, b y c son números reales, entonces

$$a + b = b + a \quad , \quad a \cdot b = b \cdot a \qquad \text{Propiedad conmutativa}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad , \quad a(b \cdot c) = (a \cdot b)c = a \cdot b \cdot c \qquad \text{Propiedad asociativa}$$

$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.}$$

Ejemplo 2.4

Reducir términos semejantes en los siguientes polinomios:

1. $5y^2z + 8yz^2 - 21y^2z + 14yz^2$.
2. $-3x^3y^2 + 2x^2y^2 - x^3y^3 + 10x^3y^2 + 2x^3y^3 - 4x^3y^3$.

Solución

1. Observamos que los términos $5y^2z$ y $-21y^2z$ son semejantes y que $8yz^2$ y $14yz^2$ son semejantes. Por tanto,

$$\begin{aligned}
&5y^2z + 8yz^2 - 21y^2z + 14yz^2 \\
&\qquad = 5y^2z - 21y^2z + 8yz^2 + 14yz^2 && \text{Propiedad conmutativa de la suma} \\
&\qquad = (5 - 21)\,y^2z + (8 + 14)\,yz^2 && \text{Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma} \\
&\qquad = -16y^2z + 22yz^2.
\end{aligned}$$

2. Observamos que los términos $-3x^3y^2$ y $10x^3y^2$ son semejantes y los términos $-x^3y^3$, $2x^3y^3$ y $-4x^3y^3$ son semejantes. El término $2x^2y^2$ no es semejante con ningún otro en el polinomio. Luego,

$$\begin{aligned}
&-3x^3y^2 + 2x^2y^2 - x^3y^3 + 10x^3y^2 + 2x^3y^3 - 4x^3y^3 \\
&\qquad = -3x^3y^2 + 10x^3y^2 - x^3y^3 + 2x^3y^3 - 4x^3y^3 + 2x^2y^2 && \text{Propiedad conmutativa de la suma} \\
&\qquad = (-3+10)\,x^3y^2 + (-1+2-4)\,x^3y^3 + 2x^2y^2 && \text{Propiedad distributiva} \\
&\qquad = 7x^3y^2 - 3x^3y^3 + 2x^2y^2.
\end{aligned}$$

Símbolos de agrupación

Son símbolos que se emplean para indicar que la expresión encerrada en ellos se considera como una sola cantidad. Usaremos paréntesis ( ), corchetes [ ] y llaves { }.

Para suprimir los símbolos de agrupación empleamos las siguientes reglas:

1. Si el signo $+$ precede a un símbolo de agrupación, este último se puede suprimir sin modificar el signo de los términos que contiene.

   Ejemplo 2.5

   Eliminar símbolos de agrupación y reducir términos semejantes en $(3x+7y)+(2x-5y)$.

   Solución

   $$(3x+7y)+(2x-5y) = 3x+7y+2x-5y = 5x+2y.$$

   Al quitar los paréntesis los signos no cambian puesto que el signo $+$ precede a cada uno de los dos paréntesis, ya que como dijimos antes, cuando no aparece el signo explícitamente, éste es $+$.

2. Si el signo $-$ precede a un símbolo de agrupación, este último se puede suprimir cambiando el signo de cada uno de los términos que contiene.

   Ejemplo 2.6

   Eliminar símbolos de agrupación y reducir términos semejantes en $(5ab-3c)-(2ab-7c)$.

   Solución

   $$(5ab-3c)-(2ab-7c) = 5ab-3c-2ab+7c = 3ab+4c,$$

   ya que el signo $-$ que precede a $2ab-7c$, cambia el signo $+$ de $2ab$ por el signo $-$, quedando $-2ab$ y el signo $-$ de $-7c$ por $+$, quedando $+7c$.

3. Si en una expresión aparecen varios símbolos de agrupación, unos contenidos en otros, para suprimirlos se sugiere empezar por el más interno.

Ejemplo 2.7

Eliminar símbolos de agrupación y reducir términos semejantes en $2x - \{5x^2 - (7x + 4x^2)\}$.

Solución

$$2x - \{5x^2 - (7x + 4x^2)\} = 2x - \{5x^2 - 7x - 4x^2\} = 2x - 5x^2 + 7x + 4x^2 = 9x - x^2.$$

Primero eliminamos los paréntesis, cambiando los signos de los términos en su interior ya que la expresión $(7x + 4x^2)$ está precedida del signo $-$. Luego suprimimos las llaves en $\{5x^2 - 7x - 4x^2\}$, cambiando nuevamente los signos. ¿Por qué?

Ejemplo 2.8

Simplificar los siguientes polinomios suprimiendo los símbolos de agrupación y agrupando términos semejantes:

1. $2m - [(m - n) - (m + n)]$.
2. $a + \{(-2a + b) - (-a + b - c) + a\}$.
3. $2x + [-5x - (-2y + \{-x + y\})]$.
4. $2a - (-4a + b) - \{-[-4a + (b - a) - (-b + a)]\}$.

Solución

1. $2m - [(m - n) - (m + n)]$

$$\begin{aligned} &= 2m - [m - n - m - n] && \text{Suprimimos los paréntesis internos} \\ &= 2m - [-2n] && \text{Reducimos términos semejantes} \\ &= 2m + 2n && \text{Suprimimos los corchetes.} \end{aligned}$$

2. $a + \{(-2a + b) - (-a + b - c) + a\}$

$$\begin{aligned} &= a + \{-2a + b + a - b + c + a\} && \text{Suprimimos los paréntesis internos} \\ &= a - 2a + b + a - b + c + a && \text{Suprimimos las llaves} \\ &= a + c && \text{Reducimos términos semejantes.} \end{aligned}$$

3. $2x + [-5x - (-2y + \{-x + y\})]$

$$\begin{aligned} &= 2x + [-5x - (-2y - x + y)] && \text{Suprimimos las llaves internas} \\ &= 2x + [-5x + 2y + x - y] && \text{Eliminamos los paréntesis} \\ &= 2x - 5x + 2y + x - y && \text{Eliminamos los corchetes} \\ &= -2x + y && \text{Reducimos términos semejantes.} \end{aligned}$$

4. $2a - (-4a + b) - \{-[-4a + (b - a) - (-b + a)]\}$

$$\begin{aligned} &= 2a + 4a - b - \{-[-4a + b - a + b - a]\} \\ &= 6a - b - \{4a - b + a - b + a\} \\ &= 6a - b - 4a + b - a + b - a \\ &= b. \end{aligned}$$

Justificar cada uno de los pasos.

Lección 3

Suma y resta de polinomios

Suma

Para sumar dos o más polinomios se encierra cada uno usando símbolos de agrupación, se escribe uno a continuación del otro separados por el signo $+$, se eliminan los símbolos de agrupación y se reducen términos semejantes.

Ejemplo 3.1

En cada numeral, hallar la suma de los polinomios dados.

1. $3x^2 + x + 1$ y $2x^2 - 3x - 5$.
2. $3x^2 + 7x - 9$ y $-5x^3 - \dfrac{1}{5}x^2 + x - 5$.
3. $x^4 - x^2y^2$, $-5x^3y + 6xy^3$, $-4xy^3 + y^4$ y $-4x^2y^2 - 6$.
4. $a^6 - a^4 + a^2$, $\frac{3}{5}a^5 - \frac{3}{8}a^3 - \frac{1}{2}a$, $-\frac{3}{7}a^4 - \frac{5}{8}a^2 + 6$ y $-\frac{3}{8}a - 6$.

Solución

1. Encerramos cada polinomio entre paréntesis y los escribimos uno a continuación del otro separados por el signo $+$:

$$
\begin{aligned}
(3x^2+x+1) + \left(2x^2 - 3x - 5\right) & \\
&= 3x^2 + x + 1 + 2x^2 - 3x - 5 && \text{Eliminamos paréntesis} \\
&= (3+2)\,x^2 + (1-3)\,x + (1-5) && \text{Agrupamos términos semejantes} \\
&= 5x^2 - 2x - 4 && \text{Realizamos operaciones con los coeficientes.}
\end{aligned}
$$

2. Encerramos cada polinomio entre paréntesis y los escribimos uno a continuación del otro separados por el signo $+$:

$$
\begin{aligned}
(3x^2 + 7x - 9) + \left(-5x^3 - \frac{1}{5}x^2 + x - 5\right) & \\
&= 3x^2 + 7x - 9 - 5x^3 - \frac{1}{5}x^2 + x - 5 && \text{Eliminamos paréntesis}
\end{aligned}
$$

$$= \left(3 - \frac{1}{5}\right)x^2 + (7+1)\,x + (-9-5) + \left(-5x^3\right)$$ Agrupamos términos semejantes

$$= \frac{3\,(5)-1}{5}x^2 + 8x + (-14) + \left(-5x^3\right)$$ Realizamos operaciones con coeficientes

$$= \frac{14}{5}x^2 + 8x - 14 - 5x^3$$

$$= -5x^3 + \frac{14}{5}x^2 + 8x - 14$$ Ordenamos el polinomio resultante respecto a x.

3. Encerramos cada polinomio entre paréntesis y los escribimos uno a continuación del otro separados por el signo $+$:

$$\begin{aligned}
&\left(x^4 - x^2y^2\right) + \left(-5x^3y + 6xy^3\right) + \left(-4xy^3 + y^4\right) + \left(-4x^2y^2 - 6\right)\\
&\qquad = x^4 - x^2y^2 - 5x^3y + 6xy^3 - 4xy^3 + y^4 - 4x^2y^2 - 6\\
&\qquad = x^4 + (-1-4)\,x^2y^2 - 5x^3y + (6-4)\,xy^3 + y^4 - 6\\
&\qquad = x^4 - 5x^2y^2 - 5x^3y + 2xy^3 + y^4 - 6\\
&\qquad = x^4 - 5x^3y - 5x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 - 6.
\end{aligned}$$

4. Encerramos cada polinomio entre paréntesis y los escribimos uno a continuación del otro separados por el signo $+$:

$$\begin{aligned}
&(a^6 - a^4 + a^2) + \left(\frac{3}{5}a^5 - \frac{3}{8}a^3 - \frac{1}{2}a\right) + \left(-\frac{3}{7}a^4 - \frac{5}{8}a^2 + 6\right) + \left(-\frac{3}{8}a - 6\right)\\
&= a^6 - a^4 + a^2 + \frac{3}{5}a^5 - \frac{3}{8}a^3 - \frac{1}{2}a - \frac{3}{7}a^4 - \frac{5}{8}a^2 + 6 - \frac{3}{8}a - 6\\
&= a^6 + \left(-1 - \frac{3}{7}\right)a^4 + \left(1 - \frac{5}{8}\right)a^2 + \frac{3}{5}a^5 - \frac{3}{8}a^3 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)a + (6-6)\\
&= a^6 + \left(\frac{-7-3}{7}\right)a^4 + \left(\frac{8-5}{8}\right)a^2 + \frac{3}{5}a^5 - \frac{3}{8}a^3 + \left(\frac{-4-3}{8}\right)a + 0\\
&= a^6 - \frac{10}{7}a^4 + \frac{3}{8}a^2 + \frac{3}{5}a^5 - \frac{3}{8}a^3 - \frac{7}{8}a\\
&= a^6 + \frac{3}{5}a^5 - \frac{10}{7}a^4 - \frac{3}{8}a^3 + \frac{3}{8}a^2 - \frac{7}{8}a.
\end{aligned}$$

Resta

Recordemos que en la expresión $a - b$, a se llama **minuendo** y b **sustraendo**.

Para restar dos polinomios se encierra cada uno usando un símbolo de agrupación, se escribe primero el minuendo y a continuación el sustraendo precedido del signo $-$. Luego se eliminan los símbolos de agrupación y se reducen términos semejantes.

Ejemplo 3.2

1. De $3x^2 + x + 1$ restar $2x^2 - 3x - 5$.
2. Restar $25x + 25x^3 - 18x^2 - 11x^5 - 46$ de $x^3 + 8x^2 - 9 + 15x$.
3. Restar $-8xy^3 - 6x^2y^2 + 20y^4$ de $x^4 + 9xy^3 - 11y^4$.
4. Restar $-\dfrac{7}{8}a^2 + \dfrac{9}{10}a + \dfrac{7}{8}$ de $a^3 + \dfrac{1}{2}a^2 - a + \dfrac{5}{6}$.

Solución

1. Escribimos el minuendo y a continuación el sustraendo precedido del signo $-$:

$$
\begin{aligned}
&(3x^2 + x + 1) - \left(2x^2 - 3x - 5\right) \\
&\quad = 3x^2 + x + 1 - 2x^2 + 3x + 5 && \text{Eliminamos paréntesis} \\
&\quad = (3-2)\,x^2 + (1+3)\,x + (1+5) && \text{Agrupamos términos semejantes} \\
&\quad = x^2 + 4x + 6 && \text{Realizamos operaciones con los coeficientes.}
\end{aligned}
$$

2. De acuerdo con el enunciado, el minuendo es $x^3 + 8x^2 - 9 + 15x$ y el sustraendo es $25x + 25x^3 - 18x^2 - 11x^5 - 46$. Escribimos entonces el minuendo y luego el sustraendo precedido del signo $-$:

$$
\begin{aligned}
&\left(x^3 + 8x^2 - 9 + 15x\right) - \left(25x + 25x^3 - 18x^2 - 11x^5 - 46\right) \\
&= x^3 + 8x^2 - 9 + 15x - 25x - 25x^3 + 18x^2 + 11x^5 + 46 && \text{Eliminamos paréntesis} \\
&= (1-25)\,x^3 + (8+18)\,x^2 + (-9+46) + (15-25)x + 11x^5 && \text{Agrupamos términos semejantes} \\
&= -24x^3 + 26x^2 + 37 - 10x + 11x^5 && \text{Realizamos operaciones con coeficientes} \\
&= 11x^5 - 24x^3 + 26x^2 - 10x + 37 && \text{Organizamos el polinomio resultante.}
\end{aligned}
$$

3. Escribimos el minuendo y a continuación el sustraendo precedido del signo $-$:

$$
\begin{aligned}
&(x^4 + 9xy^3 - 11y^4) - \left(-8xy^3 - 6x^2y^2 + 20y^4\right) \\
&\qquad = x^4 + 9xy^3 - 11y^4 + 8xy^3 + 6x^2y^2 - 20y^4 && \text{Eliminamos paréntesis} \\
&\qquad = x^4 + (9+8)xy^3 - (11+20)y^4 + 6x^2y^2 && \text{Agrupamos términos semejantes} \\
&\qquad = x^4 + 17xy^3 - 31y^4 + 6x^2y^2 && \text{Realizamos operaciones con coeficientes} \\
&\qquad = x^4 + 6x^2y^2 + 17xy^3 - 31y^4 && \text{Organizamos el polinomio con respecto a } x.
\end{aligned}
$$

4. Escribimos el minuendo y a continuación el sustraendo precedido del signo $-$:

$$\begin{aligned}
&\left(a^3+\frac{1}{2}a^2-a+\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{7}{8}a^2+\frac{9}{10}a+\frac{7}{8}\right)\\
&\qquad=a^3+\frac{1}{2}a^2-a+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}a^2-\frac{9}{10}a-\frac{7}{8}\\
&\qquad=a^3+\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{8}\right)a^2-\left(1+\frac{9}{10}\right)a+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{8}\right)\\
&\qquad=a^3+\left(\frac{4+7}{8}\right)a^2-\left(\frac{10+9}{10}\right)a+\left(\frac{20-21}{24}\right)\\
&\qquad=a^3+\frac{11}{8}a^2-\frac{19}{10}a-\frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Lección 4

Multiplicación de polinomios

El producto de a y b se escribe a x b, $a \cdot b$, o simplemente ab. a y b se llaman **factores** del producto ab.

Para multiplicar polinomios usaremos las propiedades **conmutativa** ($ab = ba$), **asociativa** ($a(bc) = (ab)c = abc$), **distributiva** del producto con respecto a la suma ($a(b + c) = ab + ac$), las **leyes de exponentes** y la **ley de signos** que enunciamos a continuación.

Ley de signos

El signo del producto depende de los signos de los factores, así:

Si los dos factores tienen el mismo signo, el signo del producto es $+$, es decir,

$$\begin{array}{rcll} (+)\,(+) & = & + & \quad (+ \text{ por } + \text{ da } +) \\ (-)\,(-) & = & + & \quad (- \text{ por } - \text{ da } +). \end{array}$$

Si los dos factores tienen signo diferente, el signo del producto es $-$, es decir,

$$\begin{array}{rcll} (+)\,(-) & = & - & \quad (+ \text{ por } - \text{ da } -) \\ (-)\,(+) & = & - & \quad (- \text{ por } + \text{ da } -). \end{array}$$

Ejemplo 4.1

$$\begin{array}{cccc} (-2)\,z = -2z & \dfrac{1}{5}(-w) = -\dfrac{1}{5}w & (-7)\,(-5) = 35 & b\,(-c) = -bc \\ (-d)\,(-w) = dw & 5\,(-3) = -15 & (-a)\,c = -ac & (-2)4 = -8. \end{array}$$

Veamos un ejemplo en el que además de la ley de signos, utilicemos las leyes de exponentes que vimos anteriormente.

Ejemplo 4.2

1. $b^5 \cdot b^3 = \underbrace{bbbbb}_{5 \text{ veces}} \cdot \underbrace{bbb}_{3 \text{ veces}} = \underbrace{bbbbbbbb}_{8 \text{ veces}} = b^8.$

2. $z^3 z^6 = z^9$, ya que $3 + 6 = 9$.

3. $(x + y)^2\,(x + y)^{13} = (x + y)^{15}$, ya que $2 + 13 = 15$.

4. $(-m^5)(m^7) = -m^{12}$, ya que $-$ por $+$ da $-$ y $5 + 7 = 12$.

5. $(2z^3)^4 = 2^{1x4}z^{3x4} = 16z^{12}$, ya que $2^{1x4} = 16$ y 3x4 = 12.

Ejemplo 4.3

Efectuar las operaciones indicadas, eliminando símbolos de agrupación y reduciendo términos semejantes:

1. $(3y^3)(2y^2)$.
2. $(2x^2y^3)(3xz^2)(5y)$.
3. $(2a^2b^3)^3$.
4. $2x(x + 2y) - 3y(2x - y) + xy(2 - y)$.
5. $2x^2 - 3x[2x - y(x - 2y) - y^2]$.
6. $(3x^2 - 4y^2)(x^3 - 2x^2y + xy^2)$.
7. $(x^2 - xy - y^2)(x^2 + xy + y^2)$.

Solución

1. $(3y^3)(2y^2) = 6y^5$.
2. $(2x^2y^3)(3xz^2)(5y) = (2x^2y^3)(15xyz^2) = 30x^3y^4z^2$.

   Por las leyes asociativa y conmutativa de la multiplicación, se pueden efectuar todas las operaciones simultáneamente:

   $(2x^2y^3)(3xz^2)(5y) = (2\text{x}3\text{x}5)x^{(2+1)}y^{(3+1)}z^2 = 30x^3y^4z^2$.
3. $(2a^2b^3)^3 = 2^3(a^2)^3(b^3)^3 = 8a^6b^9$.
4. $2x(x+2y)-3y(2x-y)+xy(2-y) = 2x^2+4xy-6xy+3y^2+2xy-xy^2 = 2x^2+3y^2-xy^2$.
5. $$\begin{aligned} 2x^2 - 3x[2x - y(x - 2y) - y^2] &= 2x^2 - 3x[2x - xy + 2y^2 - y^2] \\ &= 2x^2 - 6x^2 + 3x^2y - 6xy^2 + 3xy^2 \\ &= -4x^2 + 3x^2y - 3xy^2. \end{aligned}$$
6. $$\begin{aligned} (3x^2 - 4y^2)(x^3 - 2x^2y + xy^2) &= 3x^2(x^3 - 2x^2y + xy^2) - 4y^2(x^3 - 2x^2y + xy^2) \\ &= 3x^2(x^3) + 3x^2(-2x^2y) + 3x^2(xy^2) + (-4y^2)(x^3) \\ &\qquad + (-4y^2)(-2x^2y) + (-4y^2)(xy^2) \\ &= 3x^5 - 6x^4y + 3x^3y^2 - 4y^2x^3 + 8x^2y^3 - 4xy^4 \\ &= 3x^5 - 6x^4y - x^3y^2 + 8x^2y^3 - 4xy^4. \end{aligned}$$

   Otra forma de expresar esta operación es la siguiente:

$x^3 - 2x^2y + xy^2$ $3x^2 - 4y^2$	Escribimos primero el polinomio con más términos, ordenado respecto a una de las variables. En el renglón siguiente escribimos el otro polinomio ordenado respecto a la misma variable del primero.
$3x^5 - 6x^4y + 3x^3y^2$	Multiplicamos el primer término del segundo polinomio por cada uno de los términos del primero.
$-4x^3y^2 + 8x^2y^3 - 4xy^4$	Multiplicamos el segundo término del segundo polinomio por cada uno de los términos del primero.
$3x^5 - 6x^4y - x^3y^2 + 8x^2y^3 - 4xy^4$	Sumamos los resultados, reduciendo términos semejantes.

Luego, $(x^3 - 2x^2y + xy^2)(3x^2 - 4y^2) = 3x^5 - 6x^4y - x^3y^2 + 8x^2y^3 - 4xy^4$.

Nótese que cuando se hace la multiplicación del segundo término por cada uno de los términos del primero, los resultados se van escribiendo teniendo en cuenta los términos semejantes.

7.

$$\begin{array}{ccccc}
x^2 & -xy & -y^2 & & \\
x^2 & +xy & +y^2 & & \\
\hline
x^4 & -x^3y & -x^2y^2 & & \\
 & x^3y & -x^2y^2 & -xy^3 & \\
 & & x^2y^2 & -xy^3 & -y^4 \\
\hline
x^4 & & -x^2y^2 & -2xy^3 & -y^4
\end{array}$$

Luego, $(x^2 - xy - y^2)(x^2 + xy + y^2) = x^4 - x^2y^2 - 2xy^3 - y^4$.

Productos notables

Realizar las siguientes multiplicaciones:

1. $(a+b)(a-b)$.
2. $(a+b)^2$.
3. $(a-b)^2$.
4. $(a+b)^3$.
5. $(a-b)^3$.
6. $(x+a)(x+b)$.

Solución

1. $(a+b)(a-b) = a \cdot a + a(-b) + b \cdot a + b(-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

2. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2.$

3. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a\cdot a + a(-b) + (-b)a + (-b)(-b) = a^2-ab-ba+b^2 = a^2-2ab+b^2.$

4. $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$$\begin{aligned}
&= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\
&= a\cdot a^2 + a(2ab) + a\cdot b^2 + b\cdot a^2 + b(2ab) + b\cdot b^2\\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.
\end{aligned}$$

5. $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$

$$\begin{aligned}
&= (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\
&= a\cdot a^2 + a(-2ab) + a\cdot b^2 + (-b)a^2 + (-b)(-2ab) + (-b)b^2\\
&= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\
&= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.
\end{aligned}$$

6. $(x+a)(x+b) = x\cdot x + x\cdot b + a\cdot x + a\cdot b$

$$\begin{aligned}
&= x^2+bx+ax+ab\\
&= x^2+(a+b)x+ab.
\end{aligned}$$

Estos productos, que presentamos en la siguiente tabla, son conocidos como **Productos Notables**. Se usan frecuentemente y simplifican las operaciones que los involucran, por lo que es recomendable memorizarlos, lo cual se logra con la práctica.

Suma por diferencia de dos expresiones	$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
Cuadrado de una suma	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
Cuadrado de una diferencia	$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
Cubo de una suma	$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
Cubo de una diferencia	$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
Producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$	$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab.$

Observación: Si a y b son números positivos, los productos anteriores se pueden representar geométricamente en términos de áreas o volúmenes de figuras conocidas. Por ejemplo, el cuadrado de una suma puede interpretarse en términos de sumas de áreas de cuadrados y rectángulos así:
Construyamos un cuadrado de lado $a+b$, cuya área es $(a+b)^2$. Este cuadrado se puede descomponer en un cuadrado de área a^2, un cuadrado de área b^2 y dos rectángulos de área ab cada uno.

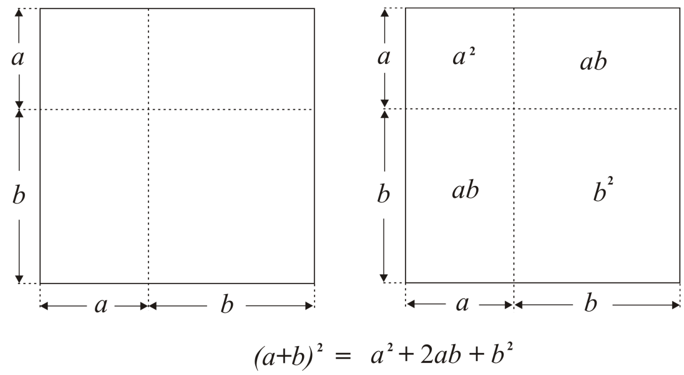

Figura 4.1

Ejemplo 4.4

Utilizar los productos notables para realizar las siguientes operaciones.

1. $(x-5)^2$.
2. $(a^2-b)(a^2+b)$.
3. $(1-2y)^3$.
4. $(x+y+z)(x-y-z)$.
5. $(x-5)(x+4)$.
6. $(x^5-2)(x^5-7)$.

Solución

1. $(x-5)^2$ es el cuadrado de una diferencia. Luego,

   $(x-5)^2 = x^2 - 2x(5) + 5^2 = x^2 - 10x + 25.$

2. $(a^2-b)(a^2+b)$ es el producto de la suma por la diferencia de dos términos. Así,

   $(a^2-b)(a^2+b) = \left(a^2\right)^2 - \left(b\right)^2 = a^4 - b^2.$

3. $(1-2y)^3$ es el cubo de una diferencia $a-b$, con $a=1$ y $b=2y$. Luego,

   $(1-2y)^3 = 1^3 - 3\left(1\right)^2\left(2y\right) + 3\left(1\right)\left(2y\right)^2 - \left(2y\right)^3 = 1 - 6y + 12y^2 - 8y^3.$

4. Reagrupando de manera apropiada los términos de cada paréntesis podemos obtener la suma por diferencia de dos expresiones:

   $(x+y+z)(x-y-z) = [x+(y+z)][x-(y+z)] = x^2 - (y+z)^2 = x^2 - y^2 - 2yz - z^2.$

5. $(x-5)(x+4)$ es un producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ con $a=-5$ y $b=4$. Luego,

   $(x-5)(x+4) = x^2 + (-5+4)x + (-5)(4) = x^2 - x - 20.$

6. Estamos en el mismo caso del ejemplo anterior con $a=-2$ y $b=-7$ y además el primer término de cada binomio es x^5 en lugar de x. Luego,

   $(x^5-2)(x^5-7) = (x^5)^2 + (-2-7)x^5 + (-2)(-7) = x^{10} - 9x^5 + 14.$

Lección 5

División de polinomios

La división de a entre b, con $b \neq 0$, se escribe $a \div b$, a/b ó $\dfrac{a}{b}$; a se llama **dividendo** y b **divisor**. Recordemos que

$$\frac{a}{b} = c \qquad \text{significa} \qquad a = b \cdot c.$$

El divisor debe ser diferente de cero, para que la división tenga sentido[1].

La división de polinomios guarda muchas semejanzas con la división entre números enteros. A continuación nos referiremos brevemente a esta operación entre enteros.

Como sabemos, dividir un entero positivo a entre un entero positivo b, con a mayor que b, consiste en encontrar el número de veces que b "está" o "cabe" en a. Se presentan dos situaciones que ilustramos en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 5.1

$$\begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 3 \end{array}$$

El cociente es 3 y el residuo es 2. Es decir, 5 "está" 3 veces en el 17 y sobran 2:

$$17 = 5 \cdot 3 + 2 \qquad \text{o} \qquad \frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}.$$

La división no es exacta.

Ejemplo 5.2

$$\begin{array}{r|l} 120 & 8 \\ \cline{2-2} 40 & 15 \\ 0 & \end{array}$$

El cociente es 15 y el residuo es 0. Es decir, 8 "está" exactamente 15 veces en el 120:

$$120 = 8 \cdot 15 \qquad \text{o} \qquad \frac{120}{8} = 15.$$

La división es exacta.

[1] Obsérvese que si, por ejemplo, $\dfrac{4}{0}$ fuese algún número c entonces se tendría $4 = 0 \cdot c$, es decir se tendría $4 = 0$, lo cual es falso.

Consideremos ahora dos polinomios a y b, $b \neq 0$, en la misma variable y con el grado de a mayor o igual que el grado de b.

De manera similar a lo que ocurre en los enteros, dividir el polinomio a entre el polinomio b, consiste en hallar un polinomio c (el **cociente**) y un polinomio r (el **residuo**) de modo que

$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b} \qquad \text{o} \qquad a = b \cdot c + r.$$

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} r & \text{c} \end{array}$$

con $r = 0$ o grado de r menor que grado de b. Cuando $r = 0$, la división es **exacta**.

Para dividir polinomios usaremos, entre otras, las leyes de los exponentes (enunciadas en la Lección 1) y la siguiente ley de signos para la división, la cual es similar a la dada para la multiplicación:

$$\begin{array}{rcll} (+)/(+) & = & + & (+ \text{ dividido } + \text{ da } +) \\ (-)/(-) & = & + & (- \text{ dividido } - \text{ da } +) \\ (+)\,/\,(-) & = & - & (+ \text{ dividido } - \text{ da } -) \\ (-)\,/\,(+) & = & - & (- \text{ dividido } + \text{ da } -). \end{array}$$

División de monomios

Para dividir un monomio por otro monomio bastan la ley de signos para la división y la ley 2. de exponentes

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ para } m \text{ y } n \text{ enteros, } a \neq 0.$$

Ejemplo 5.3

Realizar las operaciones y simplificar el resultado expresándolo con exponentes positivos.

1. $10x^8 \div 2x^2$.
2. $3b^7 \div 12b^4$.
3. $\frac{5}{3}y^{11} \div y^3$

Solución

1. $10x^8 \div 2x^2 = \dfrac{10x^8}{2x^2} = 5x^{8-2} = 5x^6$.
2. $3b^7 \div 12b^4 = \dfrac{3b^7}{12b^4} = \dfrac{3}{12}b^{7-4} = \dfrac{1}{4}b^3$.
3. $\dfrac{5}{3}y^{11} \div y^3 = \dfrac{\frac{5}{3}y^{11}}{y^3} = \dfrac{5}{3}y^{11-3} = \dfrac{5}{3}y^8$.

División de un polinomio por un monomio

El resultado de dividir un polinomio, con dos o más términos, por un monomio, es la suma de los resultados de la división de cada término del polinomio por el monomio.

Ejemplo 5.4

1. $\dfrac{20x^{12} - 16x^8 - 8x^5}{4x^4} = \dfrac{20x^{12}}{4x^4} - \dfrac{16x^8}{4x^4} - \dfrac{8x^5}{4x^4} = 5x^8 - 4x^4 - 2x.$

   El cociente es $5x^8 - 4x^4 - 2x$ y el residuo es 0.

2. $\dfrac{7x^6 + 9x^3}{3x^5} = \dfrac{7x^6}{3x^5} + \dfrac{9x^3}{3x^5} = \dfrac{7}{3}x + \dfrac{9x^3}{3x^5}.$

   El cociente es $\dfrac{7}{3}x$ y el residuo es $9x^3$.

   La expresión $\dfrac{9x^3}{3x^5}$ puede simplicarse: $\dfrac{9x^3}{3x^5} = 3x^{3-5} = 3x^{-2} = \dfrac{3}{x^2}$.

   Luego,
$$\frac{7x^6 + 9x^3}{3x^5} = \frac{7}{3}x + \frac{3}{x^2}.$$

División de un polinomio por otro polinomio

Para realizar la división de un polinomio con dos o más términos, entre otro polinomio con dos o más términos, se sigue un procedimiento, conocido como **división larga**, similar al que se sigue en la división entre enteros. Los pasos a realizar son los siguientes:

1. Tanto el dividendo como el divisor se escriben en orden descendente.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y se obtiene así el primer término del cociente.
3. Se multiplica el primer término del cociente por el divisor y el producto obtenido se resta del dividendo, escribiendo cada término debajo de su semejante. Si algún término de este producto no tiene término semejante en el dividendo, se escribe en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y el divisor.
4. El resultado obtenido en el paso anterior se trata como un nuevo dividendo y se repiten los pasos 2. y 3..
5. Se continúa este proceso hasta obtener cero o un polinomio de grado menor que el grado del divisor. Cualquiera de los dos es el residuo.
6. El resultado de la división se escribe así:
$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$$

o también como

$$\text{dividendo} = \text{cociente} \times \text{divisor} + \text{residuo},$$

forma que utilizaremos con frecuencia en factorización

Ejemplo 5.5

Dividir $8x^4 + 27x - 22x^2 - 18$ entre $x + 2x^2$.

Solución

Aunque hay diferentes maneras de colocar dividendo, divisor y cociente, vamos a usar la siguiente:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
8x^4 & & -22x^2 & +27x & -18 & 2x^2 + x \\
\cline{6-6}
-8x^4 & -4x^3 & & & & 4x^2 - 2x - 10 \\
\cline{1-5}
 & -4x^3 & -22x^2 & +27x & -18 & \\
 & 4x^3 & +2x^2 & & & \\
\cline{1-5}
 & & -20x^2 & +27x & -18 & \\
 & & +20x^2 & +10x & & \\
\cline{1-5}
 & & & 37x & -18 &
\end{array}
$$

Explicación

Ordenamos dividendo y divisor en orden descendente con relación a x.

Como en el dividendo falta el término en x^3 y al realizar la división van a resultar términos en x^3, entonces dejamos un espacio entre $8x^4$ y $-22x^2$ para el término en x^3.

Dividimos el primer término del dividendo $8x^4$ entre el primer término del divisor $2x^2$, $8x^4 \div 2x^2 = 4x^2$ que es el primer término del cociente.

Multiplicamos $4x^2$ por cada uno de los términos del divisor: $(4x^2)(2x^2) = 8x^4$ y $(4x^2)(x) = 4x^3$. Como estos productos hay que restarlos del dividendo, les cambiamos el signo, los escribimos debajo de los términos del dividendo semejantes con ellos y hacemos la suma correspondiente.

El residuo obtenido $-4x^3 - 22x^2 + 27x\ -18$ se trata como un nuevo dividendo y se repiten los últimos tres pasos: Dividimos $-4x^3$ entre el primer término del divisor $2x^2$, $-4x^3 \div 2x^2 = -2x$ que es el segundo término del cociente. Multiplicamos $-2x$ por cada uno de los términos del divisor obteniendo $(-2x)(2x^2) = -4x^3$ y $(-2x)(x) = -2x^2$, les cambiamos el signo, los escribimos debajo de sus semejantes y hacemos la suma correspondiente.

Con el residuo obtenido $-20x^2 + 27x\ -18$ repetimos nuevamente el proceso: Dividimos $-20x^2$ entre el primer término del divisor $2x^2$, $-20x^2 \div 2x^2 = -10$ y éste es el tercer término del cociente. Multiplicamos -10 por cada uno de los términos del divisor y seguimos realizando el procedimiento hasta obtener como residuo $37x-18$ que es un polinomio de grado menor que el divisor. Aquí termina la división y el resultado se expresa así:

$$\frac{8x^4+27x-22x^2-18}{x+2x^2}=4x^2-2x-10+\frac{37x-18}{x+2x^2}$$

ó

$$8x^4+27x-22x^2-18=\left(4x^2-2x-10\right)\left(x+2x^2\right)+37x-18.$$

Ejemplo 5.6

Dividir $6x^4+7x^3+6x^2+32x-7$ entre $3x^2+5x-2$.

Solución

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +7x^3 & +6x^2 & +32x & -7 & 3x^2+5x-2 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & -10x^3 & +4x^2 & & & 2x^2-x+5 \\ \cline{1-5}
 & -3x^3 & +10x^2 & +32x & -7 & \\
 & 3x^3 & +5x^2 & -2x & & \\ \cline{1-5}
 & & 15x^2 & +30x & -7 & \\
 & & -15x^2 & -25x & +10 & \\ \cline{1-5}
 & & & 5x & +3 &
\end{array}$$

Por tanto,

$$\frac{6x^4+7x^3+6x^2+32x-7}{3x^2+5x-2}=2x^2-x+5+\frac{5x+3}{3x^2+5x-2}$$

ó

$$6x^4+7x^3+6x^2+32x-7=(2x^2-x+5)(3x^2+5x-2)+5x+3.$$

Lección 6

Factorización o descomposición en factores I

Iniciemos refiriéndonos al concepto de factor para números enteros.

Por ejemplo, por el hecho de que $12 = 3 \cdot 4$ decimos que 3 y 4 son factores de 12. De igual forma 2 y 6 son factores de 12 porque $12 = 2 \cdot 6$. ¿Cómo determinar si un entero b dado es un factor de 12? Lo será si hay un entero c tal que $12 = b \cdot c$, es decir, si la división $12 \div b$ es exacta.

En general, un entero $b \neq 0$ es un factor de un entero a si hay un entero c tal que

$$a = b \cdot c$$

o, en otras palabras, si la división $a \div b$ es exacta.

Ejemplo 6.1

Hallar todos los factores positivos de 18.

Solución

Haciendo la división de 18 entre cada uno de los enteros 1, 2, ..., 18 encontramos que la división es exacta únicamente para 1, 2, 3, 6, 9 y 18. Luego, estos números son los factores buscados. Por ejemplo, 6 es un factor porque $\frac{18}{6} = 3$ de donde $18 = 6 \cdot 3$.

Nótese que -6 también es factor ya que $18 = (-6)(-3)$. Los factores negativos de 18 son -1, -2, -3, -6, -9 y -18.

Un entero mayor que 1, cuyos únicos factores positivos son 1 y él mismo, se llama **número primo**. Por ejemplo, 2 es primo porque es mayor que 1 y sus únicos factores positivos son 1 y el propio 2. Los primos menores que 10 son 2, 3, 5 y 7.

Un hecho importante es que todo entero mayor que 1 puede expresarse como un producto de factores primos. Tal expresión se conoce como **factorización** o **descomposición en factores primos**.

A continuación se ilustra, con el número 126, cómo se obtiene la mencionada factorización.

Iniciamos dividiendo 126 entre 2: $126 \div 2 = 63$. Luego, $126 = 2 \cdot 63$.

Seguiría la división $63 \div 2$, pero ésta no es exacta.

Dividimos 63 entre 3 : $\quad 63 \div 3 = 21$. Luego, $126 = 2 \cdot \underbrace{3 \cdot 21}_{63}$.

Dividimos 21 entre 3 : $21 \div 3 = 7$. Luego, $126 = 2 \cdot 3 \cdot \underbrace{3 \cdot 7}_{21}$.

7 es primo : $7 \div 7 = 1$.

Luego, la factorización en factores primos de 126 es

$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

El proceso anterior se realiza de manera abreviada en la forma siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Pasemos ahora a considerar el concepto de factor y de factorización para polinomios.

Dado un polinomio, cada uno de los polinomios que multiplicados entre sí dan como resultado el primero, se llama **factor** de ese polinomio.

Ejemplo 6.2

1. $x + 1$ y $x - 1$ son factores de $x^2 - 1$, ya que de los productos notables sabemos que $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.
2. $4a$ y $2b - 3$ son factores de $8ab - 12a$. ¿Por qué?
3. $x - 5$ es factor de $(x - 5)^2$. ¿Por qué?

Ejemplo 6.3

Determinar si $x + 1$ es o no es factor de $x^3 + x^2 - 3x - 3$.

Solución

Hagamos la división $x^3 + x^2 - 3x - 3 \div x + 1$:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +x^2 & -3x & -3 & x+1 \\ \cline{5-5} -x^3 & -x^2 & & & x^2-3 \\ \hline & & -3x & -3 & \\ & & 3x & +3 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Se obtiene

$$\frac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{x + 1} = x^2 - 3$$

es decir,

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = (x + 1)\left(x^2 - 3\right).$$

Luego, $x + 1$ sí es factor de $x^3 + x^2 - 3x - 3$.

Factorizar un polinomio dado es expresarlo como un producto de dos o más polinomios.

Así como en los enteros hay números primos, en los polinomios hay polinomios primos: Un polinomio p de grado mayor o igual que 1 se llama **primo** si p no se puede expresar como producto de polinomios, cada uno de ellos de grado menor que el de p.

Notas:

- Nos limitaremos a polinomios con coeficientes enteros o con coeficientes racionales.
- Convenimos en que si el polinomio a factorizar tiene coeficientes enteros, la factorización es con factores cuyos coeficientes son también enteros. Si esto no es posible, entonces con factores cuyos coeficientes son racionales o en último caso números reales.
- Un polinomio p con coeficientes en un cierto conjunto numérico (enteros, racionales o reales) puede ser primo en dicho conjunto numérico, pero no serlo en otro.

Ejemplo 6.4

1. $2x - 3$ es primo (en los enteros, en los racionales y en los reales) porque no se puede expresar como un producto de polinomios de grado menor que 1, es decir, como un producto de polinomios constantes.
2. El polinomio $x^2 - 2$ es primo en el conjunto de los enteros y también en el de los racionales (¿Por qué?), pero no lo es en el conjunto de los reales, puesto que en dicho conjunto $x^2 - 2$ factoriza como

$$x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right).$$

Recordemos que $\sqrt{2}$ no es entero ni racional.

En lo que sigue en esta lección y en las siguientes cuatro lecciones, veremos distintos casos de factorización.

Caso 1: Factor común

Todos los términos del polinomio a factorizar tienen un factor común, es decir, aparecen números, letras o combinaciones de números y letras, comunes a todos los términos del polinomio.

a) **El factor común es un monomio.**

Ejemplo 6.5

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $x^3 - x^2y + 3x$.
2. $9ab - 12bc + 30b^2$.
3. $18m^3n^4z - 12mn^2 + 36n^3z^3$.
4. $3mn^2w - 12m^2nw^2 + 4m^5n^2 - 6mn$.

Solución

1. $x^3 - x^2y + 3x = x \cdot x \cdot x - x \cdot x \cdot y + 3x$. Como x es el único factor común en todos los términos, escribimos el polinomio original como el producto de x por un polinomio cuyos términos resultan de dividir cada uno de los términos del polinomio dado entre x.
$$x^3 - x^2y + 3x = x\left(\frac{x^3}{x} - \frac{x^2y}{x} + \frac{3x}{x}\right) = x(x^2 - xy + 3).$$

2. 3 es el mayor factor común de los coeficientes 9, -12 y 30, y b es el único factor común literal. Tenemos así
$$9ab - 12bc + 30b^2 = 3b\left(\frac{9ab}{3b} - \frac{12bc}{3b} + \frac{30b^2}{3b}\right) = 3b(3a - 4c + 10b).$$
En la práctica se escribe el resultado sin indicar las divisiones.

3. Descomponemos 18, 12 y 36 en sus factores primos:
$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$
Luego, $18 = 2 \text{ x } 3^2$, $12 = 2^2 \text{ x } 3$ y $36 = 2^2 \text{ x } 3^2$ y por tanto el mayor factor común de los coeficientes es $2 \text{ x } 3 = 6$. El factor común literal de mayor grado es n^2 y así
$$18m^3n^4z - 12mn^2 + 36n^3z^3 = 6n^2(3m^3n^2z - 2m + 6nz^3).$$

4. $3mn^2w - 12m^2nw^2 + 4m^5n^2 - 6mn = mn\,(3nw - 12mw^2 + 4m^4n - 6)$.

b) **El factor común es un polinomio**

Ejemplo 6.6

Descomponer en factores:

1. $x(a+1) + 3(a+1)$.
2. $2x(n-1) - 3y(n-1)$.
3. $(3x+2)(x+y-z) - (3x+2) - (x+y-1)(3x+2)$.

Solución

1. $x(a+1)+3(a+1)=(a+1)\left(\dfrac{x(a+1)}{a+1}+\dfrac{3(a+1)}{a+1}\right)$ Los dos términos tienen como factor común $a+1$

$$=(a+1)(x+3).$$

2. $2x(n-1)-3y(n-1)=(n-1)(2x-3y)$. El factor común es $n-1$.

3. $(3x+2)(x+y-z)-(3x+2)-(x+y-1)(3x+2)$

$$\begin{aligned}
&=(3x+2)[(x+y-z)-1-(x+y-1)] && \text{El factor común es } 3x+2\\
&=(3x+2)(x+y-z-1-x-y+1) && \text{Eliminamos signos de agrupación}\\
&=(3x+2)(-z) && \text{Reunimos términos semejantes}\\
&=-z(3x+2).
\end{aligned}$$

Caso 2: Factor común por agrupación de términos

En algunos polinomios en los cuales no aparece explícito un factor común, al ordenar y agrupar adecuadamente los términos, se encuentra un factor común.

Ejemplo 6.7

Factorizar:

1. $x(a+1)-a-1$.
2. $am-bm+an-bn$.
3. $3m-2n-2nx^4+3mx^4$.
4. $3a-b^2+2b^2x-6ax$.
5. $2x^3-nx^2+2xz^2-nz^2-3ny^2+6xy^2$.

Solución

1. $x(a+1)-a-1=x(a+1)-(a+1)$ Agrupamos los dos últimos términos

$$=(a+1)(x-1) \qquad \text{El factor común es } a+1.$$

2. Es muy importante tener en cuenta que al hacer las agrupaciones, las expresiones que se obtengan al sacar el factor común en cada una, sean iguales.

$$\begin{aligned}
am-bm+an-bn&=(am-bm)+(an-bn)\\
&=m(a-b)+n(a-b)\\
&=(a-b)(m+n).
\end{aligned}$$

La agrupación también pudo hacerse así:

$am-bm+an-bn=(am+an)-(bm+bn)=a(m+n)-b(m+n)=(m+n)(a-b)$.

Observamos que, en ambos casos, el resultado es el mismo.

3. $$\begin{aligned}3m-2n-2nx^4+3mx^4 &= (3m-2n)+(3mx^4-2nx^4)\\ &= (3m-2n)+x^4(3m-2n)\\ &= (3m-2n)(1+x^4).\end{aligned}$$

Organizando y agrupando los términos de otra forma:

$$\begin{aligned}3m-2n-2nx^4+3mx^4 &= (3m+3mx^4)-(2n+2nx^4)\\ &= 3m(1+x^4)-2n(1+x^4)\\ &= (1+x^4)(3m-2n).\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}3a-b^2+2b^2x-6ax &= (3a-b^2)-(6ax-2b^2x)\\ &= (3a-b^2)-2x(3a-b^2)\\ &= (3a-b^2)(1-2x).\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}2x^3-nx^2+2xz^2-nz^2-3ny^2+6xy^2 &= \left(2x^3-nx^2\right)+\left(2xz^2-nz^2\right)-\left(3ny^2-6xy^2\right).\\ &= x^2\left(2x-n\right)+z^2\left(2x-n\right)-3y^2\left(n-2x\right)\\ &= x^2\left(2x-n\right)+z^2\left(2x-n\right)+3y^2\left(2x-n\right)\\ &= \left(2x-n\right)\left(x^2+z^2+3y^2\right).\end{aligned}$$

Lección 7

Factorización o descomposición en factores II

Caso 3: Trinomio cuadrado perfecto

En la clase de productos notables vimos que:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Las expresiones a la derecha de las igualdades, conocidas como **trinomios cuadrados perfectos**, sólo difieren en el signo del término de la mitad. Así, un trinomio cuadrado perfecto es un trinomio que tiene las siguientes características:

1. Dos de sus términos son cuadrados perfectos, con signo $+$, es decir, se pueden escribir de la forma a^2 y b^2.
2. El otro término es igual a dos veces el producto de las expresiones a y b que aparecen elevadas al cuadrado en 1., con signo $+$ o $-$.

Si en 2., el signo es $+$ el trinomio factoriza como $(a+b)^2$, y si es $-$ factoriza como $(a-b)^2$.

Ejemplo 7.1

Factorizar:

1. $9x^2 + 12x + 4$.
2. $4a^2 + 12ab + 9b^2$.
3. $25x^2 - 70x + 49$.
4. $z^2 - zy + y^2$.
5. $9x^2 - 48x + 64$.
6. $a^2 - \dfrac{18}{5}a + \dfrac{81}{25}$.
7. $x^2y^2 + 2xy + 1$.
8. $ax^2 - 8ax + 16a$.

Solución

1. $9x^2 + 12x + 4$ es un trinomio cuadrado perfecto ya que $9x^2 = (3x)^2$, $4 = 2^2$ y $12x = 2(3x)(2)$. Por tanto,
$$9x^2 + 12x + 4 = (3x+2)^2.$$

2. Como $4a^2 = (2a)^2$, $9b^2 = (3b)^2$ y $12ab = 2(2a)(3b)$ entonces $4a^2 + 12ab + 9b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto y por tanto,
$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2.$$

3. $25x^2 - 70x + 49$ es un trinomio cuadrado perfecto porque $25x^2 = (5x)^2$, $49 = 7^2$ y $70x = 2(5x)(7)$. Luego,
$$25x^2 - 70x + 49 = (5x - 7)^2.$$

4. $z^2 - zy + y^2$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque aunque z^2 y y^2 son cuadrados perfectos, se tiene que $-2zy$ es diferente de $-zy$ que es el término de la mitad. Entonces no podemos aplicar este caso de factorización.

5. Como $9x^2 = (3x)^2$, $64 = 8^2$ y $48x = 2(3x)(8)$ entonces $9x^2 - 48x + 64$ es un trinomio cuadrado perfecto. Por tanto,
$$9x^2 - 48x + 64 = (3x - 8)^2.$$

6. Como $a^2 = (a)^2$, $\dfrac{81}{25} = \left(\dfrac{9}{5}\right)^2$ y $\dfrac{18}{5}a = 2(a)\left(\dfrac{9}{5}\right)$ entonces
$$a^2 - \frac{18}{5}a + \frac{81}{25} = \left(a - \frac{9}{5}\right)^2.$$

7. Como $x^2y^2 = (xy)^2$, $1 = 1^2$ y $2xy = 2(xy)(1)$ entonces
$$x^2y^2 + 2xy + 1 = (xy + 1)^2.$$

8. $ax^2 - 8ax + 16a$ es un trinomio cuyos términos tienen un factor común a. Entonces
$$ax^2 - 8ax + 16a = a\left(x^2 - 8x + 16\right).$$
La expresión entre paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto ya que x^2 es un cuadrado perfecto, $16 = 4^2$ y $8x = 2(x)(4)$. Luego
$$ax^2 - 8ax + 16a = a(x - 4)^2.$$

Caso 4: Diferencia de cuadrados

De los productos notables sabemos que
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

La expresión a la derecha de la igualdad es una diferencia de cuadrados perfectos, por tanto, si el polinomio a factorizar es de esta forma, debemos considerar esta igualdad de derecha a izquierda para factorizarlo como
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Ejemplo 7.2

Factorizar:

1. $x^2 - 16$.
2. $81y^2 - 25x^2$.
3. $a^2 - 4b^2$.
4. $16x^2 - 25y^2$.
5. $x^4 - 81$.
6. $a^2 - \dfrac{1}{25}$.

Solución

1. $x^2 - 16 = (x)^2 - (4)^2 = (x+4)(x-4)$. Por tanto,
$$x^2 - 16 = (x+4)(x-4).$$
2. $81y^2 - 25x^2 = (9y)^2 - (5x)^2 = (9y+5x)(9y-5x)$. Por tanto,
$$81y^2 - 25x^2 = (9y+5x)(9y-5x).$$
3. $a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2 = (a+2b)(a-2b)$. Por tanto,
$$a^2 - 4b^2 = (a+2b)(a-2b).$$
4. Como $16x^2 - 25y^2 = (4x)^2 - (5y)^2$, entonces
$$16x^2 - 25y^2 = (4x+5y)(4x-5y).$$
5. Como $x^4 - 81 = (x^2)^2 - 9^2$ entonces
$$x^4 - 81 = \left(x^2+9\right)\left(x^2-9\right).$$
El segundo factor es de nuevo una diferencia de cuadrados perfectos y por lo tanto se puede continuar con la factorización. Como $x^2 - 9 = x^2 - 3^2$ entonces $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ y así,
$$x^4 - 81 = \left(x^2+9\right)(x+3)(x-3).$$
Nota : $x^2 + 9$ no es factorizable en la forma $(x+a)(x+b)$ con a y b números reales, es decir, $x^2 + 9$ es primo en el conjunto de los reales.

   Más adelante veremos algunas sumas de dos cuadrados que sí se pueden factorizar en los reales.
6. $a^2 - \dfrac{1}{25} = a^2 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^2$. Por tanto,
$$a^2 - \frac{1}{25} = \left(a + \frac{1}{5}\right)\left(a - \frac{1}{5}\right).$$

Lección 8

Factorización o descomposición en factores III

Caso 5: Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción

En este caso veremos cómo factorizar algunos trinomios que no son trinomios cuadrados perfectos pero que al sumarles una cantidad apropiada se convierten en trinomios cuadrados perfectos.

Para que la expresión dada no varíe, si sumamos una cantidad debemos restar la misma cantidad. Ésta debe ser un cuadrado perfecto para que al restarla nos resulte una diferencia de cuadrados, que ya sabemos factorizar.

Ejemplo 8.1

Factorizar

1. $a^4 + 2a^2 + 9$.
2. $4x^4 + 3x^2y^2 + 9y^4$.
3. $1 - 126a^2b^4 + 169a^4b^8$.
4. $c^8 - 45c^4 + 100$.
5. $4 - 108x^2 + 121x^4$.
6. $x^8 + 4x^4y^4 + 16y^8$.

Solución

1. Vemos que $a^4 + 2a^2 + 9$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque $a^4 = (a^2)^2$, $9 = 3^2$ y $2(a^2)(3) = 6a^2 \neq 2a^2$.

   Una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es convirtiendo el segundo término $2a^2$ en $6a^2$ y ello se logra sumándole $4a^2$. Para que el trinomio dado no varíe debemos restar la misma cantidad $4a^2$ que se sumó.

$$\begin{aligned} & a^4 + 2a^2 + 9 \\ &\quad = a^4 + 2a^2 + 9 + 4a^2 - 4a^2 && \text{Sumamos y restamos } 4a^2 \\ &\quad = (a^4 + 2a^2 + 9 + 4a^2) - 4a^2 && \text{Agrupamos los primeros 4 términos} \\ &\quad = (a^4 + 6a^2 + 9) - 4a^2 && \text{Reducimos términos semejantes en el paréntesis} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a^2+3)^2 - (2a)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= [(a^2+3)+2a][(a^2+3)-2a] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= (a^2+2a+3)(a^2-2a+3) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } a.
\end{aligned}
$$

2. Vemos que $4x^4+3x^2y^2+9y^4$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque $4x^4 = (2x^2)^2$, $9y^4 = (3y^2)^2$ y $2(2x^2)(3y^2) = 12x^2y^2 \neq 3x^2y^2$.

   Una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es convirtiendo el segundo término $3x^2y^2$ en $12x^2y^2$ y ello se logra sumándole $9x^2y^2$. Para que el trinomio dado no varíe debemos restar la misma cantidad $9x^2y^2$ que se sumó.

$$
\begin{aligned}
&4x^4+3x^2y^2+9y^4\\
&= 4x^4+3x^2y^2+9y^4+9x^2y^2-9x^2y^2 && \text{Sumamos y restamos } 9x^2y^2\\
&= (4x^4+3x^2y^2+9y^4+9x^2y^2)-9x^2y^2 && \text{Agrupamos los primeros 4 términos}\\
&= (4x^4+12x^2y^2+9y^4)-9x^2y^2 && \text{Reducimos términos semejantes en el paréntesis}\\
&= (2x^2+3y^2)^2-(3xy)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= [(2x^2+3y^2)+3xy][(2x^2+3y^2)-3xy] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&= (2x^2+3xy+3y^2)(2x^2-3xy+3y^2) && \text{Ordenamos cada factor respecto a } x.
\end{aligned}
$$

   Nota: Observemos en los ejemplos anteriores, que la factorización del trinomio dado pudo hacerse, por este método, porque la cantidad que sumamos y restamos para completar el trinomio cuadrado perfecto es un cuadrado perfecto y de esa manera resultó al final una diferencia de cuadrados que hizo posible la factorización.

3. $1-126a^2b^4+169a^4b^8$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque $1 = 1^2$, $169a^4b^8 = (13a^2b^4)^2$ y $2(1)(13a^2b^4) = 26a^2b^4 \neq 126a^2b^4$.

   En este caso una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es convirtiendo el segundo término $-126a^2b^4$ en $-26a^2b^4$ y ello se logra sumando $100a^2b^4$.

$$
\begin{aligned}
&1-126a^2b^4+169a^4b^8\\
&= 1-126a^2b^4+169a^4b^8+100a^2b^4-100a^2b^4 && \text{Sumamos y restamos} 100a^2b^4\\
&= (1-126a^2b^4+169a^4b^8+100a^2b^4)-100a^2b^4 && \text{Agrupamos los primeros 4 términos}\\
&= (1-26a^2b^4+169a^4b^8)-100a^2b^4 && \text{Reducimos términos semejantes en el paréntesis}\\
&= (1-13a^2b^4)^2-\left(10ab^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&= [(1-13a^2b^4)+10ab^2][(1-13a^2b^4)-10ab^2] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}
\end{aligned}
$$

$$= (1 + 10ab^2 - 13a^2b^4)(1 - 10ab^2 - 13a^2b^4) \quad \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } a.$$

Nota: En lugar de sumar y restar una cantidad apropiada para obtener un trinomio cuadrado perfecto, podemos también descomponer el segundo término en dos cantidades o términos donde uno de ellos es el que se requiere para tener el trinomio cuadrado perfecto. Usemos esta técnica en los dos ejemplos siguientes.

4. Observamos que $c^8 - 45c^4 + 100$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$c^8 = \left(c^4\right)^2, \ 100 = (10)^2 \text{ y } 2(c^4)(10) = 20c^4 \neq 45c^4.$$

Se tiene un trinomio cuadrado perfecto si el segundo término es $-20c^4$ y una manera de obtenerlo es descomponiendo $-45c^4$ como $-20c^4 - 25c^4$.

$$\begin{aligned}
& c^8 - 45c^4 + 100 \\
&= c^8 - 20c^4 - 25c^4 + 100 && \text{Descomponemos } -45c^4 \\
&= (c^8 - 20c^4 + 100) - 25c^4 && \text{Reorganizamos y agrupamos términos} \\
&= (c^4 - 10)^2 - \left(5c^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\
&= [(c^4 - 10) + 5c^2][(c^4 - 10) - 5c^2] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&= (c^4 + 5c^2 - 10)(c^4 - 5c^2 - 10) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } c.
\end{aligned}$$

5. Vemos que $4 - 108x^2 + 121x^4$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque $4 = 2^2$, $121x^4 = \left(11x^2\right)^2$ y $2(2)(11x^2) = 44x^2 \neq 108x^2$.

Una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es descomponiendo $-108x^2$ como $-44x^2 - 64x^2$.

$$\begin{aligned}
& 4 - 108x^2 + 121x^4 \\
&= 4 - 44x^2 - 64x^2 + 121x^4 && \text{Descomponemos } -108x^2 \\
&= (4 - 44x^2 + 121x^4) - 64x^2 && \text{Reorganizamos y agrupamos términos} \\
&= (2 - 11x^2)^2 - (8x)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\
&= [(2 - 11x^2) + 8x][(2 - 11x^2) - 8x] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&= (2 + 8x - 11x^2)(2 - 8x - 11x^2) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } x.
\end{aligned}$$

6. $x^8 + 4x^4y^4 + 16y^8$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque $x^8 = \left(x^4\right)^2$, $16y^8 = \left(4y^4\right)^2$ y $2(x^4)(4y^4) = 8x^4y^4 \neq 4x^4y^4$.

En este caso una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es convirtiendo el segundo término $4x^4y^4$ en $8x^4y^4$ y ello se logra sumando $4x^4y^4$.

$$
\begin{aligned}
&x^8+4x^4y^4+16y^8\\
&\quad= x^8+4x^4y^4+16y^8+4x^4y^4-4x^4y^4 && \text{Sumamos y restamos } 4x^4y^4\\
&\quad= (x^8+4x^4y^4+16y^8+4x^4y^4)-4x^4y^4 && \text{Agrupamos los primeros 4 términos}\\
&\quad= (x^8+8x^4y^4+16y^8)-4x^4y^4 && \text{Reducimos términos semejantes}\\
&\quad= (x^4+4y^4)^2-\left(2x^2y^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&\quad= [(x^4+4y^4)+2x^2y^2][(x^4+4y^4)-2x^2y^2] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&\quad= (x^4+2x^2y^2+4y^4)(x^4-2x^2y^2+4y^4) && \text{Ordenamos cada factor respecto}\\
& && \text{a la letra } x.
\end{aligned}
$$

Caso 6: Factorización de una suma de dos cuadrados

Existen algunas sumas de dos cuadrados que sumándoles y restándoles una misma cantidad, pueden llevarse al caso anterior y factorizarse.

Ejemplo 8.2

Factorizar:

1. $4x^8+y^8$.
2. $64+a^{12}$.
3. $1+4n^4$.

Solución

1. Como $4x^8+y^8=(2x^4)^2+(y^4)^2$, para completar un trinomio cuadrado perfecto le sumamos un término igual a $2(2x^4)(y^4)=4x^4y^4$, y para que el polinomio dado no varíe restamos ese mismo término. Haciendo esto estamos en el caso anterior y procedemos de igual forma:

$$
\begin{aligned}
&4x^8+y^8\\
&\quad= 4x^8+y^8+4x^4y^4-4x^4y^4 && \text{Sumamos y restamos } 4x^4y^4\\
&\quad= (4x^8+4x^4y^4+y^8)-4x^4y^4 && \text{Agrupamos y ordenamos los}\\
& && \text{primeros 3 términos}\\
&\quad= (2x^4+y^4)^2-\left(2x^2y^2\right)^2 && \text{Factorizamos el trinomio}\\
&\quad= [(2x^4+y^4)+2x^2y^2][(2x^4+y^4)-2x^2y^2] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados}\\
&\quad= (2x^4+2x^2y^2+y^4)(2x^4-2x^2y^2+y^4) && \text{Ordenamos cada factor respecto}\\
& && \text{a la letra} x.
\end{aligned}
$$

2. Como $64+a^{12} = (8)^2+(a^6)^2$, para completar un trinomio cuadrado perfecto le sumamos un término igual a $2(8)(a^6) = 16a^6$:

$$\begin{aligned}
64 + a^{12} &= 64 + a^{12} + 16a^6 - 16a^6 && \text{Sumamos y restamos } 16a^6 \\
&= (64 + 16a^6 + a^{12}) - 16a^6 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos} \\
&= (8 + a^6)^2 - (4a^3)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\
&= [(8 + a^6) + 4a^3][(8 + a^6) - 4a^3] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&= (8 + 4a^3 + a^6)(8 - 4a^3 + a^6) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } a.
\end{aligned}$$

3. Como $1 + 4n^4 = 1^2 + (2n^2)^2$, sumándole el término $2(1)(2n^2) = 4n^2$ se obtiene un trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned}
1 + 4n^4 &= 1 + 4n^4 + 4n^2 - 4n^2 && \text{Sumamos y restamos } 4n^2 \\
&= (1 + 4n^2 + 4n^4) - 4n^2 && \text{Agrupamos y ordenamos los primeros 3 términos} \\
&= (1 + 2n^2)^2 - (2n)^2 && \text{Factorizamos el trinomio} \\
&= [(1 + 2n^2) + 2n][(1 + 2n^2) - 2n] && \text{Factorizamos la diferencia de cuadrados} \\
&= (1 + 2n + 2n^2)(1 - 2n + 2n^2) && \text{Ordenamos cada factor respecto a la letra } n.
\end{aligned}$$

Lección 9

Factorización o descomposición en factores IV

Caso 7: Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

De los productos notables sabemos que

$$(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq.$$

El lado derecho de esta igualdad es un polinomio de la forma $x^2 + bx + c$, con $b = p + q$ y $c = pq$. Por tanto, si queremos expresar un polinomio de la forma $x^2 + bx + c$ como el producto de dos factores $x + p$ y $x + q$, debemos encontrar p y q tales que su producto sea c, es decir $c = pq$, y su suma sea b, o sea $p + q = b$.

Ejemplo 9.1

Expresar los siguientes polinomios como producto de dos factores de grado 1:

1. $x^2 + 10x + 21$.
2. $c^2 - 9c + 20$.
3. $y^2 - 4y + 3$.
4. $28 + a^2 - 11a$.
5. $36 + 5x - x^2$.
6. $(3x + 2)^2 + 8\,(3x + 2) + 12$.

Solución

1. Veamos si el polinomio $x^2 + 10x + 21$ se puede expresar de la forma $(x + p)(x + q)$, o sea, si hay dos números p y q tales que $pq = 21$ y $p + q = 10$.

   Las formas de expresar 21 como el producto de dos enteros son: $(21)(1)$, $(-21)(-1)$, $(7)(3)$ y $(-7)(-3)$. Ahora como $21 + 1 \neq 10$, $-21 - 1 \neq 10$, $7 + 3 = 10$ y $-7 - 3 \neq 10$, entonces los únicos números que cumplen la condición son 7 y 3. Por tanto escribimos el polinomio dado como producto de dos factores así:

   $$x^2 + 10x + 21 = (x + 7)\,(x + 3)\,.$$

2. Las formas de expresar 20 como el producto de dos enteros son: $(20)(1)$, $(-20)(-1)$, $(10)(2)$, $(-10)(-2)$, $(5)(4)$ y $(-5)(-4)$. Ahora como $20 + 1 \neq -9$, $-20 - 1 \neq -9$,

$10+2\neq -9$, $-10-2\neq -9$, $5+4\neq -9$ y $-5-4=-9$, entonces los únicos números que cumplen la condición son -5 y -4. Por tanto

$$c^2-9c+20=(c-5)(c-4).$$

3. Las formas de expresar 3 como el producto de dos enteros son: $(3)(1)$ y $(-3)(-1)$. Como $3+1\neq -4$ y $-3-1=-4$, los únicos números que cumplen la condición son -3 y -1. Entonces
$$y^2-4y+3=(y-3)(y-1).$$

4. Aunque el polinomio $28+a^2-11a$ aparentemente no es de la forma x^2+bx+c, si lo organizamos adecuadamente tenemos:

$$28+a^2-11a=a^2-11a+28.$$

Las formas de expresar 28 como el producto de dos enteros son: $(28)(1)$, $(-28)(-1)$, $(14)(2)$, $(-14)(-2)$, $(7)(4)$ y $(-7)(-4)$. Ahora como $28+1\neq -11$, $-28-1\neq -11$, $14+2\neq -11$, $-14-2\neq -11$, $7+4\neq -11$ y $-7-4=-11$, entonces los únicos números que cumplen la condición son -7 y -4. Por tanto

$$28+a^2-11a=a^2-11a+28=(a-7)(a-4).$$

5. Organizamos el trinomio en la forma $-x^2+5x+36$.

Como el coeficiente de x^2 es -1, sacamos factor común -1 y así:

$$-x^2+5x+36=-\left(x^2-5x-36\right).$$

Factoricemos la expresión $x^2-5x-36$ que está entre paréntesis: Las formas de expresar -36 como el producto de dos enteros son: $(36)(-1)$, $(-36)(1)$, $(18)(-2)$, $(-18)(2)$, $(12)(-3)$, $(-12)(3)$, $(9)(-4)$, $(-9)(4)$ y $(6)(-6)$. Ahora como $36-1\neq -5$, $-36+1\neq -5$, $18-2\neq -5$, $-18+2\neq -5$, $12-3\neq -5$, $-12+3\neq -5$, $9-4\neq -5$, $-9+4=-5$ y $6-6\neq -5$, entonces los únicos números que cumplen la condición son -9 y 4 y así $x^2-5x-36=(x-9)(x+4)$. Luego,

$$36+5x-x^2=-\left(x^2-5x-36\right)=-(x-9)(x+4)=(9-x)(x+4).$$

¿Por qué?

6. $(3x+2)^2+8(3x+2)+12$.

La expresión dada tiene la forma $(\square)^2+8(\square)+12$, donde $\square$ representa a $3x+2$. Ahora, como
$$(\square)^2+8(\square)+12=((\square)+6)((\square)+2)$$
entonces

$$(3x+2)^2+8(3x+2)+12=((3x+2)+6)((3x+2)+2)=(3x+8)(3x+4).$$

Caso 8: Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$

Como

$$(px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + rq)x + rs,$$

vemos que el lado derecho de esta igualdad es un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a = pq$, $b = ps + rq$ y $c = rs$.

Luego, para factorizar un trinomio $ax^2 + bx + c$ en la forma $(px + r)(qx + s)$, debemos encontrar p, q, r y s tales que $pq = a$, $ps + rq = b$ y $rs = c$.

Ejemplo 9.2

En cada numeral, factorizar el polinomio dado.

1. $18x^2 - 13x - 5$.
2. $6y^2 + 11y - 21$.
3. $20x^2 + 7x - 6$.
4. $12x^2y^2 + xy - 20$.
5. $6x^2 - 11dx - 10d^2$.

Solución

1. En este caso $a = 18$, $b = -13$ y $c = -5$. Debemos encontrar p, q, r y s tales que

$$a = 18 = pq \quad , \quad c = -5 = rs \quad \text{y} \quad b = -13 = ps + rq.$$

Las formas de expresar $a = 18$ como producto de dos enteros son: $(18)1$, $(-18)(-1)$, $2(9)$, $(-2)(-9)$, $6(3)$ y $(-6)(-3)$. Similarmente, las formas de expresar $c = -5$ como producto de dos enteros son: $(5)(-1)$ y $(-1)5$.

Para visualizar más fácilmente las parejas de factores que necesitamos, es útil construir una tabla como la siguiente:

a	p	q	c	r	s
18	18	1	-5	5	-1
	-18	-1		-1	5
	2	9		5	-1
	-2	-9		1	-5
	6	3		-5	1
	-6	-3			

Como $b = -13 = 18(-1) + 5(1)$ entonces $p = 18$, $q = 1$, $r = 5$ y $s = -1$ cumplen las condiciones requeridas. Por tanto,

$$18x^2 - 13x - 5 = (18x + 5)(x - 1).$$

2. Para este caso $a = 6$, $b = 11$ y $c = -21$ y la tabla correspondiente es la siguiente:

a	p	q	c	r	s
6	6	1	-21	21	-1
	-6	-1		-1	21
	3	2		-21	1
	-3	-2		1	-21
				7	-3
				-3	7
				-7	3
				3	-7

Como $11 = 6(3) + (-7)\,1$, entonces $p = 6$, $q = 1$, $r = -7$ y $s = 3$, y así:

$$6y^2 + 11y - 21 = (6y - 7)\,(y + 3)\,.$$

3. La tabla de los ejemplos anteriores se puede obviar ya que con un poco de práctica los valores apropiados de p, q, r y s se pueden encontrar por tanteo.

   Por tanteo encontramos que los factores 5 y 4 de 20, y -2 y 3 de -6 cumplen que $7 = 5(3) + 4(-2)$, el cual es el coeficiente del término en x. Luego,

$$20x^2 + 7x - 6 = (5x - 2)\,(4x + 3)\,.$$

4. Vemos el polinomio dado como $12\,(xy)^2 + 1\,(xy) - 20$.

   Tomamos 4 y 3 como factores de 12 y -5 y 4 como factores de -20, y como el coeficiente del término en xy es $1 = 4(4) + 3(-5)$ entonces,

$$12x^2y^2 + xy - 20 = (4xy - 5)(3xy + 4).$$

5. Veamos el polinomio dado en la forma $ax^2 + bx + c$ con $a = 6$, $b = -11d$ y $c = -10d^2$, y busquemos p, q, r y s tales que

$$a = 6 = pq \quad , \quad c = -10d^2 = rs \quad \text{y} \quad b = -11d = ps + rq.$$

   Las formas de expresar $a = 6$ como producto de dos enteros son $6(1)$, $(-6)(-1)$, $2(3)$ y $(-2)(-3)$. Ahora, de las formas de expresar a $c = -10d^2$ como producto de dos factores sólo nos interesan las siguientes:

$$(-10d)(1d) \quad , \quad (10d)(-1d) \quad , \quad (-2d)(5d) \quad \text{y} \quad (2d)(-5d).$$

   Observemos que estas son las formas de expresar -10 como producto de dos factores, pero multiplicando cada uno de los factores por d.

   Escogemos como factores de 6 a 3 y 2, y como factores de -10 a 2 y -5, y puesto que $-11 = 3(-5) + 2(2)$ entonces $p = 3$, $q = 2$, $r = 2d$ y $s = -5d$ cumplen las condiciones. Así que

$$6x^2 - 11dx - 10d^2 = (3x + 2d)\,(2x - 5d)\,.$$

Observamos que el polinomio $6x^2 - 11dx - 10d^2$ también lo podemos escribir como $-\left(10d^2 + 11dx - 6x^2\right)$

Factorizamos la expresión $10d^2 + 11dx - 6x^2$ entre paréntesis:

$$10d^2 + 11dx - 6x^2 = (5d - 2x)(2d + 3x).$$

Luego,

$$\begin{aligned} 6x^2 - 11dx - 10d^2 &= -10d^2 - 11dx + 6x^2 \\ &= -\left(10d^2 + 11dx - 6x^2\right) \\ &= -(5d - 2x)(2d + 3x) \\ &= (2x - 5d)(2d + 3x). \end{aligned}$$

Lección 10

Factorización o descomposición en factores V

Caso 9: Cubo perfecto de binomios

En la clase de productos notables se vieron los siguientes casos:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

El lado derecho de estas igualdades se conoce como **cubo perfecto de binomios** o simplemente **cubo de binomios**.

Para que un polinomio ordenado en forma descendente respecto a una letra a sea el cubo de un binomio $a+b$, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Que tenga cuatro términos, todos con signo positivo.
2. Que el primero y último términos sean cubos perfectos, siendo estos a^3 y b^3 respectivamente.
3. Que el segundo término sea $3a^2b$ y que el tercer término sea $3ab^2$.

Es decir, si se cumplen estas condiciones el polinomio se factoriza como $(a+b)^3$.

De igual forma se deben cumplir condiciones similares a las anteriores para que un polinomio se factorice como el cubo de un binomio $a-b$.

Ejemplo 10.1

1. Dado el polinomio $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$, determinar si cumple las condiciones para ser el cubo de un binomio.
2. Ver si el polinomio $a^6 - 6a^4 + 12a^2 - 8$ es el cubo de un binomio.
3. Factorizar, si es posible, el polinomio $1 + 12a + 48a^2 + 64a^3$.
4. Factorizar $\dfrac{x^3}{8} + \dfrac{x^2y}{4} + \dfrac{xy^2}{6} + \dfrac{y^3}{27}$.

Solución

1. El polinomio tiene cuatro términos, todos con signo positivo.

   $8x^3$ es un cubo perfecto: $8x^3 = (2x)^3$.

1 es un cubo perfecto: $1 = 1^3$.

$3\,(2x)^2\,(1) = 12x^2$ es el segundo término.

$3\,(2x)\,(1)^2 = 6x$ es el tercer término.

Se cumplen las condiciones: el polinomio dado es el cubo de $2x+1$, es decir,

$$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x+1)^3 .$$

2. El polinomio tiene cuatro términos, con signos alternadamente positivos y negativos.

   a^6 es un cubo perfecto: $a^6 = (a^2)^3$.

   8 es un cubo perfecto: $8 = 2^3$.

   $-3\,(a^2)^2\,(2) = -6a^4$ es el segundo término.

   $3\,(a^2)\,(2)^2 = 12a^2$ es el tercer término.

   Luego, el polinomio dado es el cubo del binomio a^2-2, es decir,

$$a^6 - 6a^4 + 12a^2 - 8 = \left(a^2-2\right)^3 .$$

3. Para saber si es factorizable como el cubo de un binomio, veamos si se cumplen las condiciones para ello: son cuatro términos todos con signo positivo, $1 = 1^3$, $64a^3 = (4a)^3$, $3\,(1)^2\,(4a) = 12a$ es el segundo término y $3\,(1)\,(4a)^2 = 48a^2$ es el tercer término. Por tanto, el polinomio representa el cubo del binomio $1+4a$, es decir,

$$1 + 12a + 48a^2 + 64a^3 = (1+4a)^3 .$$

4. Son cuatro términos todos con signo positivo, $\dfrac{x^3}{8} = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3$, $\dfrac{y^3}{27} = \left(\dfrac{y}{3}\right)^3$, $3\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\left(\dfrac{y}{3}\right) = \dfrac{x^2y}{4}$ que es el segundo término y $3\left(\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{y}{3}\right)^2 = \dfrac{xy^2}{6}$ que es el tercer término. Luego, el polinomio dado es el cubo del binomio $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}$, es decir,

$$\frac{x^3}{8} + \frac{x^2y}{4} + \frac{xy^2}{6} + \frac{y^3}{27} = \left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^3 .$$

Caso 10: Suma o diferencia de cubos perfectos

Dos productos, que pueden considerarse como productos notables, son:

$$\begin{aligned}(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) &= a^3+b^3\\ (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) &= a^3-b^3.\end{aligned}$$

Estas igualdades, escritas como

$$\begin{aligned}a^3+b^3 &= (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\\ a^3-b^3 &= (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)\end{aligned}$$

proporcionan factorizaciones para una suma o una diferencia de cubos.

Ejemplo 10.2

Factorizar el polinomio dado.

1. $a^3 - 8$.
2. $8x^3 + 125$.
3. $27m^3 + 64n^9$.
4. $\dfrac{x^6}{125} - \dfrac{y^3}{8}$.

Solución:

1. $$\begin{aligned} a^3 - 8 &= a^3 - 2^3 && \text{Diferencia de cubos} \\ &= (a-2)\left(a^2 + 2a + 4\right) && \text{Factorizamos la diferencia de cubos.} \end{aligned}$$

   Luego,
   $$a^3 - 8 = (a-2)\left(a^2 + 2a + 4\right).$$

2. $$\begin{aligned} 8x^3 + 125 &= (2x)^3 + 5^3 && \text{Suma de cubos} \\ &= (2x+5)\left((2x)^2 - (2x)5 + 5^2\right) && \text{Factorizamos la suma de cubos.} \\ &= (2x+5)\left(4x^2 - 10x + 25\right). \end{aligned}$$

   Luego,
   $$8x^3 + 125 = (2x+5)\left(4x^2 - 10x + 25\right).$$

3. $$\begin{aligned} 27m^3 + 64n^9 &= (3m)^3 + \left(4n^3\right)^3 && \text{Suma de cubos} \\ &= \left(3m + 4n^3\right)\left((3m)^2 - (3m)(4n^3) + (4n^3)^2\right) && \text{Factorizamos la suma de cubos} \\ &= \left(3m + 4n^3\right)\left(9m^2 - 12mn^3 + 16n^6\right). \end{aligned}$$

   Luego,
   $$27m^3 + 64n^9 = \left(3m + 4n^3\right)\left(9m^2 - 12mn^3 + 16n^6\right).$$

4. $$\begin{aligned} \frac{x^6}{125} - \frac{y^3}{8} &= \left(\frac{x^2}{5}\right)^3 - \left(\frac{y}{2}\right)^3 && \text{Diferencia de cubos} \\ &= \left(\frac{x^2}{5} - \frac{y}{2}\right)\left(\left(\frac{x^2}{5}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{5}\right)\left(\frac{y}{2}\right) + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right) && \text{Factorizamos la diferencia de cubos} \\ &= \left(\frac{x^2}{5} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x^4}{25} + \frac{x^2y}{10} + \frac{y^2}{4}\right). \end{aligned}$$

   Luego,
   $$\frac{x^6}{125} - \frac{y^3}{8} = \left(\frac{x^2}{5} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x^4}{25} + \frac{x^2y}{10} + \frac{y^2}{4}\right).$$

Lección 11

División sintética, teorema del residuo y teorema del factor

División sintética

La **Regla de Rufini**, más conocida como **División Sintética**, es una forma simplificada o abreviada del procedimiento para dividir polinomios, cuando el divisor es de la forma $x-a$, donde a es un número.

Consideremos, como ejemplo, la división

$$2x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \div x - 3.$$

Realicemos primero la división en la forma usual (división larga):

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -x^3 & +2x^2 & +5x & -6 & x-3 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +6x^3 & & & & 2x^3+5x^2+17x+56 \\ \cline{1-5}
 & 5x^3 & +2x^2 & +5x & -6 & \\
 & -5x^3 & +15x^2 & & & \\ \cline{1-5}
 & & 17x^2 & +5x & -6 & \\
 & & -17x^2 & +51x & & \\ \cline{1-5}
 & & & 56x & -6 & \\
 & & & -56x & +168 & \\ \cline{1-5}
 & & & & 162 &
\end{array}$$

El cociente es $2x^3 + 5x^2 + 17x + 56$ y el residuo es 162.

A continuación explicamos paso a paso la división sintética para el ejemplo anterior:

- Del dividendo sólo se escriben los coeficientes y en la casilla del divisor $x-a$ se escribe solamente el número a, que en el ejemplo es 3:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -1 & 2 & 5 & -6 & 3 \\ \cline{6-6}
\end{array}$$

- Se deja un espacio debajo del renglón anterior (para un segundo renglón) y se traza un segmento de recta horizontal. Se inicia el proceso de división bajando el primer coeficiente, 2, al tercer renglón ubicado debajo del segmento trazado (notemos que 2 es el primer coeficiente del cociente):

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -1 & 2 & 5 & -6 & \underline{\ 3\ \ } \\
 & & & & & \\
\hline
2 & & & & &
\end{array}$$

- El coeficiente bajado, 2, se multiplica por a, que en nuestro caso es 3, y el resultado, 6, se escribe en el segundo renglón debajo del segundo coeficiente del dividendo, que es -1. Se hace la suma $-1+6$ y el resultado, 5, se escribe en el tercer renglón:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -1 & 2 & 5 & -6 & \underline{\ 3\ \ } \\
 & 6 & & & & \\
\hline
2 & 5 & & & &
\end{array}$$

- Se repite con 5 lo que acabamos de hacer con el primer coeficiente 2: se multiplica 5 por a (que es 3), se coloca el resultado, 15, en el segundo renglón debajo del tercer coeficiente y se suma verticalmente:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -1 & 2 & 5 & -6 & \underline{\ 3\ \ } \\
 & 6 & 15 & & & \\
\hline
2 & 5 & 17 & & &
\end{array}$$

- Se continúa este proceso de multiplicar y sumar hasta que se use el último coeficiente:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -1 & 2 & 5 & -6 & \underline{\ 3\ \ } \\
 & 6 & 15 & 51 & 168 & \\
\hline
2 & 5 & 17 & 56 & 162 &
\end{array}$$

- Se interpreta el tercer renglón: Los números de izquierda a derecha, sin incluir el último, son los coeficientes del cociente, correspondientes a potencias decrecientes de x, teniendo presente que el cociente es de grado una unidad menor que el grado del dividendo. El último número de dicho renglón es el residuo.

  El cociente es $2x^3 + 5x^2 + 17x + 56$ y el residuo es 162.

Observación:

Al escribir los coeficientes del dividendo debemos tener cuidado que él esté ordenado en potencias decrecientes de la variable. Si faltan algunas de estas potencias, por cada una que falte se coloca 0 como coeficiente en el lugar correspondiente.

Ejemplo 11.1

Usando la división sintética, dividir $2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1$ entre $x - 2$.

Solución

Como en el dividendo falta el término en x escribimos 0 como coeficiente en el lugar correspondiente al coeficiente de x.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & 3 & -1 & 0 & -1 & \underline{2} \\ & 4 & 14 & 26 & 52 & \\ \hline 2 & 7 & 13 & 26 & 51 & \end{array}$$

Del tercer renglón vemos que el cociente es $2x^3 + 7x^2 + 13x + 26$ y el residuo es 51, es decir,

$$\frac{2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1}{x - 2} = 2x^3 + 7x^2 + 13x + 26 + \frac{51}{x - 2}.$$

Teorema del residuo

En el ejemplo anterior, ¿qué valor se obtiene si en el dividendo reemplazamos x por 2?

Veamos: Según el resultado de la división tenemos que

$$2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1 = \left(2x^3 + 7x^2 + 13x + 26\right)(x - 2) + 51.$$

Por tanto, la respuesta a la pregunta planteada claramente es: "Si en el dividendo se reemplaza x por 2, se obtiene como resultado 51, que es el residuo".

Este hecho, que se cumple siempre, se conoce como **Teorema del Residuo** , cuyo enunciado es:

El residuo de dividir un polinomio en x entre $x - a$ se obtiene reemplazando en el polinomio la variable x por a.

Nótese que aplicando este teorema podemos hallar el residuo sin efectuar la división.

Ejemplo 11.2

Empleando el teorema del residuo, hallar el residuo que se obtiene en cada una de las divisiones siguientes:

1. $2x^3 - 6x^2 + x - 5 \div x - 2$.
2. $x^3 + 2x^2 - x - 2 \div x + 1$.

Solución

1. Aplicando el teorema del residuo tenemos que el residuo de la división se obtiene reemplazando x por 2 en el dividendo. Así, el residuo es:

$$2(2)^3 - 6(2)^2 + 2 - 5 = 2(8) - 6(4) - 3 = 16 - 24 - 3 = -11.$$

Comprobamos este resultado usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -6 & 1 & -5 & \underline{2} \\ & +4 & -4 & -6 & \\ \hline 2 & -2 & -3 & -11 & \end{array}$$

En efecto, el residuo es -11.

2. El teorema del residuo se aplica cuando el divisor es de la forma $x - a$, por lo que en este caso debemos escribir $x + 1$ como $x - (-1)$. Por tanto, para calcular el residuo reemplazamos x por -1 en el dividendo, así:

$$(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = -1 + 2 + 1 - 2 = 0.$$

Entonces, el residuo de dividir $x^3 + 2x^2 - x - 2$ entre $x + 1$ es 0. Comprobémoslo utilizando división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 2 & -1 & -2 & \underline{-1} \\ & -1 & -1 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

En efecto, el residuo de la división es 0.

Observación:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = \left(x^2 + x - 2\right)(x + 1).$$

Observamos aquí que $x + 1$ es factor de $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Ejemplo 11.3

Emplear el teorema del residuo para determinar si $x - 1$ es un factor del polinomio $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Solución

$x - 1$ es un factor del polinomio $x^3 + 2x^2 - x - 2$ si la división $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x - 1}$ es exacta, es decir, si el residuo de esta división es 0.

Aplicando el teorema del residuo, tenemos que dicho residuo es el resultado de reemplazar x por 1 en el dividendo:

$$(1)^3 + 2(1)^2 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0.$$

Como se obtuvo residuo 0, entonces $x - 1$ sí es un factor de $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Teorema del factor

Consideremos una división $p \div (x - a)$, con p un polinomio en x y a un número.

Según el teorema del residuo, tenemos que

El resultado de sustituir x por a en el polinomio p, es el residuo de la división.

También sabemos que

Si el residuo de la división es 0, entonces $x - a$ es un factor del polinomio p.

Combinando los dos hechos anteriores se obtiene el siguiente resultado, conocido como **Teorema del Factor**:

Si al sustituir x por a en un polinomio en x, se obtiene 0, entonces $x - a$ es un factor del polinomio.

Observación:

También es cierto el siguiente resultado:

Si al sustituir x por a en un polinomio en x, el resultado es diferente de 0, entonces $x - a$ no es un factor del polinomio.

Ejemplo 11.4

Utilizar el teorema del factor para determinar cuáles de los binomios dados en los numerales siguientes, son factores del polinomio $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$.

1. $x - 2$.
2. $x + 1$.
3. $x + 3$.

Solución

1. Sustituimos x por 2 en el polinomio dado:

$$2^4 + 2^3 - 5(2^2) + 2 - 6 = 16 + 8 - 20 + 2 - 6 = 0.$$

Luego, según el teorema del factor, $x - 2$ es un factor del polinomio.

2. Como $x + 1 = x - (-1)$, sustituimos x por -1 en el polinomio dado:

$$(-1)^4 + (-1)^3 - 5(-1)^2 + (-1) - 6 = 1 - 1 - 5 - 1 - 6 = -12.$$

Como $-12 \neq 0$ entonces $x + 1$ no es factor del polinomio (ver la última observación).

3. Como $x + 3 = x - (-3)$, sustituimos x por -3 en el polinomio dado:

$$(-3)^4 + (-3)^3 - 5(-3)^2 + (-3) - 6 = 81 - 27 - 45 - 3 - 6 = 0.$$

Luego, $x + 3$ es factor del polinomio.

Nota: Como $x - 2$ y $x + 3$ son factores del polinomio, podemos afirmar que

$$x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)q$$

donde q es un cierto polinomio. ¿Cómo hallar q?

Puede verse que $q = x^2 + 1$, con lo cual se tiene la siguiente factorización:

$$x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)(x^2 + 1).$$

Uno de los usos del teorema del factor es para factorizar polinomios.

Ahora, para emplear dicho teorema necesitamos números tales que al sustituir la variable por ellos, se obtenga 0.

En relación con lo anterior se tiene el siguiente resultado:

En un polinomio con coeficientes enteros y con 1 como coeficiente del término de mayor grado, **solamente** los factores del término independiente pueden ser los números que al sustituir la variable por ellos, se obtenga 0.

Se llama **término independiente** en un polinomio en una variable, al término que no tiene la variable. Así, en el polinomio $x^3 + 2x^2 - x - 2$, el término independiente es -2.

Para factorizar un polinomio del tipo descrito en el resultado anterior, utilizando el teorema del factor, hacemos lo siguiente:

a) Encontramos los factores del término independiente.

b) Reemplazamos en el polinomio dado la variable x por un factor a del término independiente. Si el resultado es diferente de 0, entonces $x - a$ no es un factor del polinomio.

c) Continuamos con los siguientes factores del término independiente hasta encontrar uno para el cual el resultado sea 0. Si b es ese factor, entonces $x - b$ es un factor del polinomio dado.

d) Dividimos el polinomio entre $x - b$ utilizando división sintética.

e) Escribimos el polinomio como el producto de $x - b$ por el polinomio cociente obtenido en d).

f) Repetimos los pasos anteriores con el polinomio cociente para ver si es posible factorizarlo por este método.

g) Se termina el proceso cuando el polinomio cociente obtenido en d) sea de grado 1 o ninguno de los factores de su término independiente lo anule.

Ejemplo 11.5

Factorizar, usando el teorema del factor, el polinomio

$$z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6.$$

Solución

El coeficiente del término de mayor grado es 1 y el término independiente es -6.

Los factores del término independiente -6 son ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

Reemplazamos en el polinomio dado la variable z por cada factor del término independiente hasta obtener uno para el cual el resultado sea cero:

> Si $z = 1$, $(1)^4 - 2(1)^3 - (1)^2 - 4(1) - 6 = -12 \neq 0$, entonces $z - 1$ no es factor de $z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6$.
>
> Si $z = -1$, $(-1)^4 - 2(-1)^3 - (-1)^2 - 4(-1) - 6 = 0$, luego $z - (-1) = z + 1$ es factor de $z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6$.

Dividimos $z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6$ entre $z + 1$, usando división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & -1 & -4 & -6 & -1 \\ & -1 & 3 & -2 & 6 & \\ \hline 1 & -3 & 2 & -6 & 0 & \end{array}$$

Luego,

$$z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6 = \left(z^3 - 3z^2 + 2z - 6\right)(z + 1).$$

Repitamos el proceso anterior con el cociente $z^3 - 3z^2 + 2z - 6$.

Los factores del término independiente -6 son ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

1 no anula a $z^3 - 3z^2 + 2z - 6$, ya que no anula a $z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6$.

Reemplazamos los otros factores de -6 en $z^3 - 3z^2 + 2z - 6$ hasta obtener uno que lo anule:

> Si $z = -1$, $(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 6 = -12 \neq 0$, entonces $z + 1$ no es factor de $z^3 - 3z^2 + 2z - 6$.
>
> Si $z = 2$, tenemos $(2)^3 - 3(2)^2 + 2(2) - 6 = -6 \neq 0$, luego, $z - 2$ no es factor.
>
> Si $z = -2$, tenemos $(-2)^3 - 3(-2)^2 + 2(-2) - 6 = -30 \neq 0$, luego, $z + 2$ no es factor.
>
> Si $z = 3$, tenemos $(3)^3 - 3(3)^2 + 2(3) - 6 = 0$, luego, $z - 3$ es factor de $z^3 - 3z^2 + 2z - 6$.

Dividimos $z^3 - 3z^2 + 2z - 6$ entre $z - 3$.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 2 & -6 & 3 \\ & 3 & 0 & 6 & \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & \end{array}$$

Entonces $z^3 - 3z^2 + 2z - 6 = (z^2 + 2)(z - 3)$.

El término independiente del nuevo cociente $z^2 + 2$ es 2, y los factores de 2 son ± 1 y ± 2. Como ninguno de éstos anula a $z^2 + 2$, entonces $z^2 + 2$ no es factorizable en los enteros.

Se obtiene así la siguiente factorización en los enteros del polinomio dado:

$$z^4 - 2z^3 - z^2 - 4z - 6 = \left(z^3 - 3z^2 + 2z - 6\right)(z + 1) = \left(z^2 + 2\right)(z - 3)(z + 1).$$

Nota: $z^2 + 2 \neq 0$ para cualquier valor de z en los reales; $z^2 + 2$ no es factorizable en los reales.

Lección 12

Ecuaciones de primer grado o ecuaciones lineales

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas con una o varias letras, en la que al sustituir las letras por números **no siempre** se obtiene un enunciado verdadero. Las letras son llamadas **variables** o **incógnitas** de la ecuación.

Una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que hay letras y al sustituir las letras por números se obtiene **siempre** un enunciado verdadero se llama una **identidad**.

Las expresiones separadas por el signo de igualdad, ya sea en una ecuación o en una identidad, se llaman **miembros**; el que está a la izquierda del signo de igualdad se llama **primer miembro** y el que está a la derecha **segundo miembro.**

Ejemplo 12.1

1. La igualdad $4x + 2 = 3x - 1$ es una ecuación porque en ella aparece una letra, x, y además al sustituir, por ejemplo, x por 1 se obtiene $6 = 2$ que es un enunciado falso. Observe que al sustituir, por ejemplo, x por -3 se obtiene $-10 = -10$ que es un enunciado verdadero.

   El primer miembro de la ecuación es $4x + 2$ y el segundo es $3x - 1$.

2. Similarmente, la igualdad $x^2 + 3y = x - y + 4$ es una ecuación con primer miembro $x^2 + 3y$ y segundo $x - y + 4$. Observe que sustituyendo x por 1 y y por 2 se obtiene el enunciado falso $7 = 3$, mientras que sustituyendo x por 0 y y por 1 se obtiene el enunciado verdadero $3 = 3$.

3. La igualdad $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ es una identidad porque al sustituir x por cualquier número se obtiene un enunciado verdadero. En general, los productos notables que hemos visto son identidades.

Centraremos la atención en ecuaciones con una sola variable y tales que cada uno de sus miembros es un polinomio en esa variable. Ecuaciones de este tipo se llaman **ecuaciones polinómicas en una variable**.

El **grado** de una ecuación polinómica en una variable, es el mayor exponente que tiene la variable en la ecuación.

Ejemplo 12.2

1. $4x + 2 = 3x - 1$ es una ecuación polinómica en la variable x de grado 1 o de primer grado.

2. $7y^4 - 5y^2 - 2 = 0$ es una ecuación polinómica en la variable y, de grado 4.

Dada una ecuación en una variable x, si al sustituir x por un número se obtiene un enunciado verdadero, se dice que el número es una **solución** o **raíz de la ecuación**. También diremos que dicho número **verifica** o **satisface** la ecuación.

Ejemplo 12.3

1. En la ecuación $x + 5 = 0$ si sustituimos x por -5 obtenemos $-5 + 5 = 0$ ó $0 = 0$ que es un enunciado verdadero. Luego, -5 es una solución o raíz de la ecuación.

   Si en la misma ecuación reemplazamos x por 2 obtenemos $2 + 5 = 0$ ó $7 = 0$ que es un enunciado falso. Luego, 2 no es una solución de la ecuación.

   Observe que -5 es el único número que satisface la ecuación. Para cualquier otro valor que se le asigne a la variable x se obtiene un enunciado falso. Esto es, la única solución de la ecuación $x + 5 = 0$ es $x = -5$.

2. En la ecuación $x^2 - 2 = x$ si sutituimos x por -1 obtenemos $(-1)^2 - 2 = -1$ ó $-1 = -1$ que es un enunciado verdadero. Luego, $x = -1$ es una solución de la ecuación.

   Si en la misma ecuación sustituimos x por 1 obtenemos $1^2 - 2 = 1$ ó $-1 = 1$ que es un enunciado falso. Luego, $x = 1$ no es solución de la ecuación.

   ¿Existirán más valores de x que satisfagan esta ecuación?

3. La ecuación $x + 5 = x - 2$ no tiene solución en el conjunto de los números reales, es decir, ningún número real la satisface. De manera similar, la ecuación $x^2 + 3 = 0$ no tienen solución en el conjunto de los números reales.

¿Cómo encontrar las soluciones de una ecuación?

Resolver una ecuación es hallar todas sus soluciones. Dos ecuaciones que tienen las mismas soluciones se dicen **equivalentes**.

El procedimiento para resolver una ecuación consiste en producir, partiendo de ella, una serie de ecuaciones equivalentes más simples hasta obtener una que se pueda resolver fácilmente. Para ésto usamos las siguientes propiedades:

a) Si sumamos o restamos un mismo término a ambos miembros de una ecuación, la igualdad no se altera.

b) Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de una ecuación por un mismo número, diferente de cero, la igualdad se conserva.

Ejemplo 12.4

Resolver la ecuación $6x - 7 = 2x + 1$.

Solución

$$\begin{array}{rcll} 6x-7 &=& 2x+1 & \text{Ecuación dada} \\ 6x-7+7 &=& 2x+1+7 & \text{Sumamos 7 a cada miembro de la ecuación} \\ 6x &=& 2x+8 & \\ 6x-2x &=& 2x+8-2x & \text{Restamos } 2x \text{ a cada miembro de la ecuación} \\ 4x &=& 8 & \\ \dfrac{4x}{4} &=& \dfrac{8}{4} & \text{Dividimos ambos lados entre 4} \\ x &=& 2. & \end{array}$$

Esta última ecuación y todas las obtenidas en este procedimiento son ecuaciones equivalentes a la ecuación dada. Luego, $x=2$ es la única solución de la ecuación original.

En la práctica sumar o restar un mismo término a ambos miembros de una ecuación equivale a trasladar el término de un miembro al otro cambiándole el signo. Este procedimiento se llama **transposición de términos.**

Ejemplo 12.5

Resolver la ecuación $2x+3=x$.

Solución

$$\begin{array}{rcll} 2x+3 &=& x & \text{Ecuación dada} \\ 2x-x &=& -3 & \text{Transponiendo términos} \\ x &=& -3. & \end{array}$$

La única solución de la ecuación es $x=-3$.

Ecuaciones lineales o de primer grado en una variable

Una **ecuación de primer grado** o **lineal** en una variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax+b=0, \text{ donde } a \text{ y } b \text{ denotan números fijos, } a \neq 0.$$

Si en la ecuación $ax+b=0$ restamos b en ambos miembros obtenemos

$$\begin{array}{rcl} ax+b-b &=& 0-b \\ ax &=& -b. \end{array}$$

Dividiendo ambos lados por a, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{ax}{a} &=& \dfrac{-b}{a} \\ x &=& -\dfrac{b}{a}. \end{array}$$

Así, si $a \neq 0$, la ecuación $ax + b = 0$ tiene exactamente una solución $x = -b/a$.

Para resolver una ecuación de primer grado en una variable, que no tenga la forma indicada antes, podemos proceder así:

a) Efectuamos las operaciones necesarias para reunir en un miembro todos los términos que contienen la variable y en el otro miembro todos los términos constantes (que no tienen la variable).

b) Reducimos términos semejantes.

c) Despejamos la variable dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la variable.

Es conveniente comprobar que la solución hallada efectivamente satisface la ecuación.

Ejemplo 12.6

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $5x = 8x - 15$.
2. $8z - 4 + 3z = 7z + z + 14$.
3. $(5 - 3y) - (-4y + 6) = (8y + 11) - (3y - 6)$.

Solución

1. $5x = 8x - 15$ Ecuación dada

   $15 = 8x - 5x$ Transponemos términos

   $15 = 3x$ Reducimos términos semejantes

   $\dfrac{15}{3} = \dfrac{3x}{3}$ Despejamos x, dividiendo ambos miembros entre 3

   $5 = x$ Simplificamos

   Luego, $x = 5$ es la única solución de la ecuación.

   Comprobemos que el valor encontrado satisface la ecuación original sustituyendo x por 5 así:

   $5\,(5) = 8\,(5) - 15$, es decir, $25 = 25$.

2. $8z - 4 + 3z = 7z + z + 14$ Ecuación dada

   $11z - 4 = 8z + 14$ Reducimos términos semejantes en cada miembro

   $11z - 8z = 14 + 4$ Transponemos términos

   $3z = 18$ Reducimos términos semejantes

   $\dfrac{3z}{3} = \dfrac{18}{3}$ Despejamos z, dividiendo ambos miembros entre 3

   $z = 6$ Simplificamos.

Por tanto, $z = 6$ es la única solución de la ecuación.

Por último, verificamos si el valor encontrado satisface la ecuación reemplazando z por 6 en la ecuación original: $8\,(6) - 4 + 3\,(6) = 7\,(6) + 6 + 14$ o sea $62 = 62$.

3. $(5 - 3y) - (-4y + 6) = (8y + 11) - (3y - 6)$ Ecuación dada

$5 - 3y + 4y - 6 = 8y + 11 - 3y + 6$ Eliminamos signos de agrupación

$y - 1 = 5y + 17$ Términos semejantes

$-4y = 18$ Trasponemos términos

$\dfrac{-4y}{-4} = \dfrac{18}{-4}$ Dividimos entre -4

$y = -\dfrac{9}{2}$ Simplificamos.

Luego, $y = -\dfrac{9}{2}$ es la única solución de la ecuación.

Verificamos que el valor encontrado satisface la ecuación original:

$\left[5 - 3\left(-\dfrac{9}{2}\right)\right] - \left[-4\left(-\dfrac{9}{2}\right) + 6\right] = \left[8\left(-\dfrac{9}{2}\right) + 11\right] - \left[3\left(-\dfrac{9}{2}\right) - 6\right]$, es decir,

$-\dfrac{11}{2} = -\dfrac{11}{2}$.

Lección 13

Solución de problemas con ecuaciones de primer grado en una variable

En matemáticas como en otras ciencias y en situaciones de la vida real, encontramos problemas que involucran dos o más cantidades relacionadas entre sí. Una gran variedad de ellos cuando se plantean matemáticamente conducen a ecuaciones las cuales hay que resolver.

En esta clase tratamos únicamente problemas que conducen a una sola ecuación de primer grado en una variable. Plantear la ecuación es algo que se adquiere con la práctica y siguiendo algunas pautas que se dan a continuación:

1. Leemos cuidadosamente el problema hasta entender claramente la situación que se plantea.
2. Identificamos las cantidades comprendidas en el problema, tanto las conocidas como las desconocidas.
3. Elegimos una de las cantidades desconocidas y la representamos mediante una variable, generalmente x, y despúes expresamos las otras cantidades desconocidas en términos de dicha variable.
4. Relacionamos estas cantidades mediante una ecuación.

Problema 13.1

La edad de Pedro es el triple de la de Juan y las dos edades suman 40 años. Hallar ambas edades.

Solución

Sea x la edad de Juan. Como la edad de Pedro es el triple de la edad de Juan, entonces la edad de Pedro es $3x$.

Ahora, como la suma de ambas edades es 40, entonces

$$x + 3x = 40.$$

Resolviendo la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} 4x &= 40 \\ x &= 10. \end{aligned}$$

Entonces la edad de Juan es 10 y la edad de Pedro, que es tres veces la de Juan, es 30.

Es fácil verificar que la solución satisface las condiciones del problema: La edad de Pedro, 30, es el triple de la de Juan, 10, y las dos suman 40.

Problema 13.2

En un hotel de dos pisos hay 48 habitaciones. Si el número de habitaciones del segundo piso es la mitad de las del primero, ¿cuántas habitaciones hay en cada piso?

Solución

Sea x el número de habitaciones del primer piso. Entonces las del segundo piso son $\frac{x}{2}$.

Como el total de habitaciones es 48, se tiene

$$x + \frac{x}{2} = 48.$$

Resolvamos esta ecuación para hallar x :

Reuniendo términos semejantes tenemos $\frac{3x}{2} = 48$, luego $x = 32$.

Por tanto, en el primer piso hay 32 habitaciones y en el segundo, que tiene la mitad, hay 16, para un total de 48.

Problema 13.3

La suma de dos números es 100 y el doble del mayor equivale al triple del menor. Hallar los números.

Solución

Sea x el número menor. Entonces $100 - x$ es el número mayor, ya que los dos suman 100.

El hecho de que el doble del mayor sea el triple del menor, lo expresamos mediante la ecuación

$$2\,(100 - x) = 3x.$$

Resolvamos la ecuación para hallar x :

$$\begin{aligned} 200 - 2x &= 3x \\ 200 &= 3x + 2x \\ 200 &= 5x \\ 40 &= x. \end{aligned}$$

Entonces el número menor es 40 y el mayor 60, números que satisfacen las condiciones del problema.

Problema 13.4

La edad actual de A es el doble de la edad actual de B y hace 10 años la edad de A era el triple de la de B. Hallar las edades actuales.

Solución

Sea x la edad actual de B. Como la de A es el doble de la de B, entonces la edad actual de A es $2x$.

Hace 10 años la edad de B era $x - 10$ y la edad de A era $2x - 10$.

El hecho de que hace 10 años la edad de A era el triple de la de B lo expresamos mediante la ecuación

$$2x - 10 = 3\,(x - 10)\,,$$

que resolvemos así:

$$\begin{aligned} 2x - 10 &= 3x - 30 \\ -10 + 30 &= 3x - 2x \\ 20 &= x. \end{aligned}$$

Luego, la edad actual de B es 20 años y la de A es 40 años.

Verificar que los valores hallados satisfacen las condiciones del problema.

Problema 13.5

En un corral hay conejos y gallinas. El número total de animales es 30 y el de patas 100. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en el corral?

Solución

Sea x el número de conejos. Como el total de animales es 30, entonces $30 - x$ es el número de gallinas.

Consideremos ahora el número de patas: como cada conejo tiene 4 patas, los x conejos tienen $4x$ patas, y como las gallinas tienen 2 patas, entre todas tienen $2\,(30 - x)$ patas.

Con estos datos podemos plantear la ecuación en términos del número de patas así:

$$4x + 2\,(30 - x) = 100.$$

Resolviendo esta ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} 4x + 60 - 2x &= 100 \\ 2x &= 100 - 60 \\ 2x &= 40 \\ x &= 20. \end{aligned}$$

Luego, en el corral hay 20 conejos y 10 gallinas para un total de 30 animales y 100 patas.

Lección 14

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Máximo común divisor - *m.c.d.*

Iniciemos recordando el concepto de máximo común divisor ($m.c.d.$) para enteros.

En los enteros la palabra **divisor** se emplea como sinónimo de **factor**. Así que, un entero b, $b \neq 0$, es un **divisor** de un entero a si hay otro entero c tal que

$$a = b \cdot c$$

o, en otras palabras, si la división $a \div b$ es exacta.

Un entero b, $b \neq 0$, es un **divisor común** de dos o más enteros si b es un divisor (o factor) de cada uno de ellos.

Ejemplo 14.1

Los divisores (o factores) de 12 son ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 y ± 12.

Los divisores (o factores) de 18 son ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 9 y ± 18.

Los divisores (o factores) comunes de 12 y 18 son ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

En el ejemplo anterior, el mayor de los divisores comunes de 12 y 18, que es 6, se llama $m.c.d.$ de 12 y 18.

Observe que todos los divisores comunes de 12 y 18 son divisores del $m.c.d.$ 6.

En general, el mayor divisor común de dos o más enteros se llama **máximo común divisor** (***m.c.d.***) de esos enteros.

Dicho $m.c.d.$ es, también, aquel divisor común positivo con la propiedad de que cualquier otro divisor común, es divisor de él.

El $m.c.d.$ de dos o más enteros se obtiene, después de factorizarlos en factores primos, como el producto de los **factores primos comunes**, cada uno elevado al **menor exponente** con el que aparezca.

Ejemplo 14.2

Hallar el $m.c.d.$ de 60 y 252.

Solución

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad\qquad 252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Los factores primos comunes son 2 y 3; 2 aparece con exponente 2 en ambos casos y el menor exponente del factor 3 es 1. Luego, el *m.c.d.* es

$$2^2 \cdot 3 = 12.$$

Observando las factorizaciones de 60 y 252 vemos que cualquiera de los divisores comunes de 60 y 252 es un divisor del *m.c.d.* hallado.

Pasamos ahora a considerar el concepto de *m.c.d.* para polinomios.

Al igual que en los enteros, en los polinomios la palabra **divisor** es sinónimo de factor:

Un polinomio $b \neq 0$ es un **divisor** de un polinomio a si la división $a \div b$ es exacta.

Un polinomio $b \neq 0$ es un **divisor común** de dos o más polinomios si b es un divisor de cada uno de ellos.

Dados dos o más polinomios, se llama **máximo común divisor** (***m.c.d.***) de esos polinomios a un divisor común de ellos con la propiedad de que cualquier otro divisor común es divisor de él.

De manera similar a lo que ocurre en los enteros, el *m.c.d.* de dos o más polinomios se obtiene, después de factorizarlos completamente, como el producto de los **factores comunes** con su **menor exponente**.

Ejemplo 14.3

Hallar el *m.c.d.* de los polinomios dados en cada uno de los siguientes numerales.

1. $12x^2y^3z \;\;,\;\; 18xy^2.$
2. $m^3 + n^3 \;\;,\;\; 3am + 3an.$
3. $8x^3 + y^3 \;\;,\;\; 4ax^2 - ay^2.$
4. $2x^3 - 2x^2 \;\;,\;\; 3x^2 - 3x \;\;,\;\; 4x^3 - 4x^2.$
5. $x^2 - 2x - 8 \;\;,\;\; x^2 - x - 12 \;\;,\;\; x^3 - 9x^2 + 20x.$
6. $x^3 + 27 \;\;,\;\; 2x^2 - 6x + 18 \;\;,\;\; x^4 - 3x^3 + 9x^2.$

Solución

1. $12x^2y^3z = 2^2 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z$

   $18xy^2 = 2 \cdot 3^2 \cdot x \cdot y^2.$

   Los factores comunes son 2, 3, x, y. El menor exponente con que aparece 2 es 1, para 3 es 1, para x es 1 y para y es 2. Luego, el *m.c.d.* es $2 \cdot 3 \cdot x \cdot y^2$, es decir, $6xy^2$.

   Observando las factorizaciones de $12x^2y^3z$ y $18xy^2$ vemos que cualquier divisor común de ellos es un divisor del *m.c.d.* hallado.

2. Factorizamos los dos polinomios:

$$\begin{aligned} m^3 + n^3 &= (m+n)\left(m^2 - mn + n^2\right) \\ 3am + 3an &= 3a\,(m+n)\,. \end{aligned}$$

   El único factor común es $m+n$ y el menor exponente con que aparece es 1, por tanto el *m.c.d.* es $m+n$.

3. Factorizamos los dos polinomios:

$$\begin{aligned} 8x^3 + y^3 &= (2x+y)\left(4x^2 - 2xy + y^2\right) \\ 4ax^2 - ay^2 &= a\left(4x^2 - y^2\right) \\ &= a\,(2x+y)\,(2x-y)\,. \end{aligned}$$

   $2x + y$ es el único factor común y el menor exponente con que aparece es 1. Así, el *m.c.d.* es $2x + y$.

4. Factorizamos los tres polinomios:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 2x^2 &= 2x^2\,(x-1) \\ 3x^2 - 3x &= 3x\,(x-1) \\ 4x^3 - 4x^2 &= 4x^2\,(x-1)\,. \end{aligned}$$

   Los factores comunes son x y $x-1$. Se toman con su menor exponente que para cada uno de ellos es 1. Por tanto, el *m.c.d.* es $x\,(x-1)$.

5. Factorizamos los polinomios:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 8 &= (x-4)\,(x+2) \\ x^2 - x - 12 &= (x-4)\,(x+3) \\ x^3 - 9x^2 + 20x &= x\left(x^2 - 9x + 20\right) = x\,(x-5)\,(x-4)\,. \end{aligned}$$

   El único factor común es $x - 4$, con exponente 1 en todos los casos. Por tanto él es el *m.c.d.*

6. Al factorizar cada polinomio tenemos:

$$\begin{aligned} x^3+27 &= (x+3)\left(x^2-3x+9\right) \\ 2x^2-6x+18 &= 2\left(x^2-3x+9\right) \\ x^4-3x^3+9x^2 &= x^2\left(x^2-3x+9\right). \end{aligned}$$

Entonces el $m.c.d.$ es x^2-3x+9.

Mínimo común múltiplo - *M.C.M.*

Empecemos con los conceptos de múltiplo, múltiplo común y mínimo común múltiplo para números enteros.

Por ejemplo, sabemos que los múltiplos positivos de 2 son los enteros

$$1\cdot 2 \quad , \quad 2\cdot 2 \quad , \quad 3\cdot 2 \quad , \quad 4\cdot 2 \quad , \quad \cdots$$

los cuales son también los enteros positivos que tienen a 2 como divisor o factor.

En general, para a y b enteros, $b \neq 0$

$$\boxed{a \text{ es } \textbf{múltiplo} \text{ de } b \text{ significa que } b \text{ es divisor o factor de } a.}$$

Un entero a es un **múltiplo común** de dos o más enteros si a es múltiplo de cada uno de ellos.

Ejemplo 14.4

Los múltiplos de 12 son 0, ± 12, ± 24, $\boldsymbol{\pm 36}$, ± 48, ± 60, $\boldsymbol{\pm 72}$, ...

Los múltiplos de 18 son 0, ± 18, $\boldsymbol{\pm 36}$, ± 54, $\boldsymbol{\pm 72}$, ± 90, ...

Los múltiplos comunes de 12 y 18 son 0, ± 36, ± 72, ...

En el ejemplo anterior, el menor de los múltiplos comunes positivos de 12 y 18, que es 36, se llama $M.C.M.$ de 12 y 18.

Se puede ver que todo múltiplo común de 12 y 18 es múltiplo del $M.C.M.$ 36.

En general, el menor múltiplo común positivo de dos o más enteros se llama **mínimo común múltiplo** (***M.C.M.***) de esos enteros.

Dicho $M.C.M.$ es también aquel múltiplo común positivo con la propiedad de que cualquier otro múltiplo común es múltiplo de él.

El $M.C.M.$ de dos o más enteros se obtiene, despúes de factorizarlos en factores primos, como el producto de los **factores primos comunes y no comunes**, cada uno de ellos elevado al **mayor exponente** con que aparece.

Ejemplo 14.5

Hallar el $M.C.M.$ de 18 y 40.

Solución

$$18 = 2 \cdot 3^2 \quad , \quad 40 = 2^3 \cdot 5.$$

Los factores primos comunes y no comunes son 2, 3 y 5. El mayor exponente con que aparece 2 es 3, para 3 es 2 y para 5 es 1. Luego, el $M.C.M.$ es

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360.$$

Observando las factorizaciones de 18 y 40 vemos que cualquier múltiplo común de 18 y 40 debe tener entre sus factores a 2^3, 3^2 y 5 y por tanto es un múltiplo del $M.C.M.$ hallado.

Pasemos ahora a considerar los conceptos de múltiplo, múltiplo común y mínimo común múltiplo para polinomios.

Por ejemplo, el polinomio $x^3 + 5x^2$ es múltiplo del polinomio x^2 porque

$$x^3 + 5x^2 = x^2 (x + 5) .$$

En general, un polinomio a es un **múltiplo** de un polinomio b, $b \neq 0$, si hay otro polinomio c tal que

$$a = b \cdot c$$

es decir, si b es un divisor o factor de a. Así,

$$\boxed{a \text{ es múltiplo de } b \text{ significa que } b \text{ es un divisor o factor de } a.}$$

Un polinomio a es un **múltiplo común** de dos o más polinomios, si a es un múltiplo de cada uno de ellos.

Dados dos o más polinomios, se llama **mínimo común múltiplo** (***M.C.M.***) de esos polinomios a un múltiplo común de ellos con la propiedad de que cualquier otro múltiplo común, es un múltiplo de él.

De manera similar a lo que ocurre en los enteros, el $M.C.M.$ de dos o más polinomios se obtiene, después de factorizarlos completamente, como el producto de los **factores comunes y no comunes**, cada uno con su **mayor exponente**.

Ejemplo 14.6

Hallar el $M.C.M.$ de los polinomios dados en los siguientes numerales.

1. $12x^2y^3z \quad , \quad 18xy^2.$
2. $2x - 2y,\ 3x + 3y \quad , \quad x^2 - 2xy + y^2.$
3. $x^2 - 2xy + y^2 \quad , \quad x^2 + 2xy + y^2 \quad , \quad x^2 - y^2 \quad , \quad x^2 - 3xy + 2y^2 \quad , \quad 2x^2 + 3xy + y^2.$

Solución

1. $12x^2y^3z = 2^2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot z$

   $18xy^2 = 2 \cdot 3^2 \cdot x \cdot y^2.$

   Los factores comunes y no comunes son 2, 3, x, y, z. El mayor exponente para 2 es 2, para 3 es 2, para x es 2, para y es 3 y para z es 1. Luego, el $M.C.M.$ es $2^2 \cdot 3^2 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot z = 36x^2y^3z$.

2. El primer paso es factorizar los polinomios:

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 2(x-y) \\ 3x + 3y &= 3(x+y) \\ x^2 - 2xy + y^2 &= (x-y)^2. \end{aligned}$$

   Los factores encontrados son: 2, 3, $x - y$ y $x + y$. El $M.C.M.$ es el producto de éstos, tomado cada uno de ellos con el mayor exponente:

$$(2)(3)(x-y)^2(x+y) = 6(x-y)^2(x+y).$$

3. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 &= (x-y)^2 \\ x^2 + 2xy + y^2 &= (x+y)^2 \\ x^2 - y^2 &= (x+y)(x-y) \\ x^2 - 3xy + 2y^2 &= (x-2y)(x-y) \\ 2x^2 + 3xy + y^2 &= (2x+y)(x+y). \end{aligned}$$

   Los factores son: $x - y$, $x + y$, $2x + y$ y $x - 2y$. Vemos que para $x - y$ y $x + y$ el mayor exponente es 2, mientras que para $x - 2y$, $2x + y$ el mayor exponente es 1. Por tanto, el $M.C.M.$ es:

$$(x-y)^2(x+y)^2(2x+y)(x-2y).$$

Ejemplo 14.7

En cada numeral, hallar el $m.c.d.$ y el $M.C.M.$ de los polinomios dados.

1. $x^2 - 25, x^3 - 125$ y $2x + 10$.
2. $6b^2x^2 - 6b^2x^3$, $3a^2x - 3a^2x^2$ y $1 - x^4$.
3. $x^3 - 9x + x^2 - 9$, $x^4 - 10x^2 + 9$, $x^2 + 4x + 3$ y $x^2 - 4x + 3$.

Solución

1. $x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$

   $x^3 - 125 = (x-5)\left(x^2 + 5x + 25\right)$

   $2x + 10 = 2(x+5).$

   El $m.c.d.$ es 1. El $M.C.M.$ es $2(x+5)(x-5)(x^2+5x+25)$.

2. $6b^2x^2 - 6b^2x^3 = 6b^2x^2(1-x)$

$3a^2x - 3a^2x^2 = 3a^2x(1-x)$

$$1 - x^4 = \left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right) = \left(1+x^2\right)(1+x)(1-x)\,.$$

El $m.c.d.$ es $1-x$.

El $M.C.M.$ es $6a^2b^2x^2(1+x^2)(1+x)(1-x)$.

3. $$\begin{aligned} x^3 - 9x + x^2 - 9 &= x^3 + x^2 - 9x - 9 \\ &= x^2(x+1) - 9(x+1) \\ &= (x+1)\left(x^2-9\right) \\ &= (x+1)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 - 10x^2 + 9 &= \left(x^2-1\right)\left(x^2-9\right) \\ &= (x+1)(x-1)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

$$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)\,.$$

El $m.c.d.$ es 1 y el $M.C.M.$ es $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)\,.$

Lección 15

Fracciones

Una expresión de la forma $\frac{a}{b}$ con a y b expresiones algebraicas, se llama **fracción algebraica**.

Las siguientes son fracciones algebraicas:

$$\frac{4z^2}{z-1} \quad , \quad \frac{xy^5-2}{x^3+2y} \quad , \quad \frac{3x+1}{2x^4+1}.$$

En una fracción algebraica el dividendo se llama **numerador** de la fracción y el divisor **denominador** de la fracción. El numerador y el denominador son los **términos** de la fracción.

Si en una fracción algebraica el numerador y el denominador son polinomios, decimos que la fracción es una **fracción racional**. Por ejemplo,

$$\frac{5x^2}{x+2} \quad , \quad \frac{7x^3+2x^2-x+1}{4x^4+2x^2+1}$$

son fracciones racionales.

Propiedades de las fracciones

1. Si el numerador de una fracción se multiplica o divide por una expresión, la fracción queda multiplicada en el primer caso, y dividida en el segundo, por la misma expresión. Es decir,

$$\frac{a \cdot \boldsymbol{c}}{b} = \boldsymbol{c} \cdot \frac{a}{b} \qquad \text{y}$$

$$\frac{\frac{a}{\boldsymbol{c}}}{b} = \frac{\frac{a}{b}}{\boldsymbol{c}}, \quad \text{con } c \neq 0.$$

2. Si el denominador de una fracción se multiplica o divide por una expresión diferente de 0, la fracción queda dividida en el primer caso, y multiplicada en el segundo, por la

misma expresión. Es decir,

$$\frac{a}{b \cdot \boldsymbol{c}} = \frac{\frac{a}{b}}{\boldsymbol{c}} \quad \text{y}$$

$$\frac{a}{\frac{b}{\boldsymbol{c}}} = \boldsymbol{c} \cdot \frac{a}{b}.$$

3. Si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican o dividen por una misma expresión diferente de cero, la fracción no se altera. Es decir,

$$\frac{a \cdot \boldsymbol{c}}{b \cdot \boldsymbol{c}} = \frac{a}{b} \quad \text{y}$$

$$\frac{\frac{a}{\boldsymbol{c}}}{\frac{b}{\boldsymbol{c}}} = \frac{a}{b}.$$

4. Si en una fracción cambiamos el signo del numerador y el del denominador, la fracción no se altera, es decir,

$$\frac{a}{b} = \frac{\boldsymbol{-}a}{\boldsymbol{-}b}.$$

5. Si en una fracción cambiamos el signo del numerador y el de la fracción, la fracción no se altera, es decir,

$$\frac{a}{b} = \boldsymbol{-}\frac{\boldsymbol{-}a}{b}.$$

6. Si en una fracción cambiamos el signo del denominador y el de la fracción, la fracción no se altera, es decir,

$$\frac{a}{b} = \boldsymbol{-}\frac{a}{\boldsymbol{-}b}.$$

Ejemplo 15.1

Cambiar signos sin alterar la fracción dada.

1. $\dfrac{x-1}{1-x}$.
2. $\dfrac{-x}{2y}$.

Solución

1. $$\begin{aligned} \frac{x-1}{1-x} &= \frac{x-1}{-(x-1)} && \text{Escribimos } 1-x \text{ como } -(x-1) \\ &= -\frac{x-1}{x-1} && \text{Cambiamos el signo del denominador y el de la fracción} \\ &= -1 && \text{si } x \neq 1. \end{aligned}$$

2. $\dfrac{-x}{2y} = -\dfrac{x}{2y}$ Cambiamos el signo del numerador y el de la fracción

$= \dfrac{x}{-2y}$ Cambiamos el signo del denominador y el de la fracción.

Simplificación de fracciones

Decimos que dos fracciones son **equivalentes** si una se obtiene de la otra a partir de operaciones sobre sus términos, sin alterar la fracción.

Simplificar una fracción racional es convertirla en una fracción equivalente cuyos términos sean primos entre sí, es decir, los factores comunes del numerador y denominador han sido cancelados.

Cuando los términos de una fracción son primos entre sí, decimos que la fracción es **irreducible** o que está reducida **a su mínima expresión.**

Para simplificar una fracción racional factorizamos el numerador y el denominador y cancelamos los factores comunes, aplicando la propiedad $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$.

Ejemplo 15.2

Simplificar las siguientes fracciones:

1. $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$.

2. $\dfrac{1 - x^2}{x^3 - 1}$.

3. $\dfrac{2x^3 + 6x^2 - x - 3}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$.

4. $\dfrac{(4n^2 + 4n - 3)(n^2 + 7n - 30)}{(2n^2 - 7n + 3)(4n^2 + 12n + 9)}$.

5. $\dfrac{a^5 - a^3 - a^2 + 1}{a^5 - 2a^4 - 6a^3 + 8a^2 + 5a - 6}$.

Solución

1. $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$ Factorizamos numerador y denominador

$= \dfrac{x-2}{x-1}$ Cancelamos el factor común $x + 1$.

2. $$\frac{1-x^2}{x^3-1} = \frac{(1+x)(1-x)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$ Factorizamos numerador y denominador

$$= \frac{-(1+x)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$ $1-x=-(x-1)$

$$= \frac{-(1+x)}{x^2+x+1}$$ Cancelamos el factor común $x-1$

$$= -\frac{1+x}{x^2+x+1}$$ Cambiamos el signo del numerador y el de la fracción.

3. $$\frac{2x^3+6x^2-x-3}{x^3+3x^2+x+3} = \frac{2x^2(x+3)-(x+3)}{x^2(x+3)+(x+3)} = \frac{(x+3)(2x^2-1)}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{2x^2-1}{x^2+1}.$$

4. $$\frac{(4n^2+4n-3)(n^2+7n-30)}{(2n^2-7n+3)(4n^2+12n+9)} = \frac{(2n-1)(2n+3)(n-3)(n+10)}{(2n-1)(n-3)(2n+3)^2} = \frac{n+10}{2n+3}.$$

5. Factoricemos el numerador:

$$\begin{aligned} a^5-a^3-a^2+1 &= (a^5-a^3)-(a^2-1) \\ &= a^3(a^2-1)-(a^2-1) \\ &= (a^2-1)(a^3-1) \\ &= (a+1)(a-1)(a-1)(a^2+a+1) \\ &= (a-1)^2(a+1)(a^2+a+1). \end{aligned}$$

Para factorizar el denominador veamos si $a-1$ ó $a+1$ son factores del denominador.

Reemplazamos a por 1 en $a^5-2a^4-6a^3+8a^2+5a-6$:

$(1)^5-2(1)^4-6(1)^3+8(1)^2+5(1)-6=0$, entonces $a-1$ si es factor.

Hagamos la división sintética:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & -2 & -6 & 8 & 5 & -6 & 1 \\ & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 & \\ \hline 1 & -1 & -7 & 1 & 6 & 0 & \end{array}$$

Entonces $a^5-2a^4-6a^3+8a^2+5a-6=(a-1)(a^4-a^3-7a^2+a+6)$.

$a-1$ es factor del cociente ya que $1^4-1^3-7(1)^2+1+6=0$.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -1 & -7 & 1 & 6 & 1 \\ & 1 & 0 & -7 & -6 & \\ \hline 1 & 0 & -7 & -6 & 0 & \end{array}$$

Luego, $a^5-2a^4-6a^3+8a^2+5a-6=(a-1)(a-1)(a^3-7a-6)=(a-1)^2(a^3-7a-6)$,

y $a+1$ es factor de a^3-7a-6 ya que $(-1)^3-7(-1)-6=0$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -7 & -6 & -1 \\ \cline{5-5} & -1 & 1 & 6 & \\ \hline 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} a^5 - 2a^4 - 6a^3 + 8a^2 + 5a - 6 &= (a-1)^2 (a+1) \left(a^2 - a - 6\right) \\ &= (a-1)^2 (a+1)(a-3)(a+2) \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{a^5 - a^3 - a^2 + 1}{a^5 - 2a^4 - 6a^3 + 8a^2 + 5a - 6} = \frac{(a-1)^2 (a+1)(a^2+a+1)}{(a-1)^2 (a+1)(a-3)(a+2)} = \frac{a^2+a+1}{(a-3)(a+2)}.$$

Lección 16

Producto y división de fracciones

Producto de fracciones

El producto de dos o más fracciones es el producto de los numeradores dividido entre el producto de los denominadores, es decir,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ac}{bd}.$$

Por ejemplo,

$$\frac{xy}{z}\cdot\frac{x^2y}{2z}=\frac{(xy)\left(x^2y\right)}{z\,(2z)}=\frac{x^3y^2}{2z^2}.$$

Por la conmutatividad de la multiplicación, podemos colocar los factores en el orden que convenga, como en el ejemplo siguiente:

$$\frac{3x\,(x+y)}{2\,(x-y)}\cdot\frac{3\,(x-2y)}{2y\,(2x-y)}\cdot\frac{5x}{4y}=\frac{(3x)\,(3)\,(5x)\,(x+y)\,(x-2y)}{(2)\,(2y)\,(4y)\,(x-y)\,(2x-y)}=\frac{45x^2\,(x+y)\,(x-2y)}{16y^2\,(x-y)\,(2x-y)}.$$

El procedimiento para simplificar el producto de dos o más fracciones es el siguiente:

1. Factorizamos completamente numeradores y denominadores de las fracciones que se van a multiplicar.
2. Simplificamos las fracciones resultantes, si es posible.
3. Multiplicamos entre sí los numeradores y los denominadores y simplificamos la fracción resultante.

Ejemplo 16.1

Simplificar los productos indicados:

1. $\dfrac{(a-2b)\,(a+b)}{(a-b)\,(a+3b)}\cdot\dfrac{(a-b)\,(a+5b)}{(a-2b)}\cdot\dfrac{(a+3b)}{(a+b)\,(a-3b)}.$

2. $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+3x-2}\cdot\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-1}\cdot\dfrac{3x^2+6x}{2x-4}.$

3. $\dfrac{a+2b}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{a-2b}{b-a}\cdot\dfrac{a+b}{4b^2-a^2}.$

Solución

1. $\dfrac{(a-2b)(a+b)}{(a-b)(a+3b)} \cdot \dfrac{(a-b)(a+5b)}{(a-2b)} \cdot \dfrac{(a+3b)}{(a+b)(a-3b)}$
$$= \frac{(a-2b)(a+b)(a-b)(a+5b)(a+3b)}{(a-b)(a+3b)(a-2b)(a+b)(a-3b)}$$
$$= \frac{a+5b}{a-3b}.$$

2. Factorizamos numeradores y denominadores:
$$\frac{x^2-3x+2}{2x^2+3x-2} \cdot \frac{2x^2+5x-3}{x^2-1} \cdot \frac{3x^2+6x}{2x-4} = \frac{(x-2)(x-1)}{(2x-1)(x+2)} \cdot \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{3x(x+2)}{2(x-2)}.$$
Cancelamos los factores comunes que hay en los numeradores y denominadores que son: $x-2$, $x-1$, $2x-1$, $x+2$. El resultado es
$$\frac{x^2-3x+2}{2x^2+3x-2} \cdot \frac{2x^2+5x-3}{x^2-1} \cdot \frac{3x^2+6x}{2x-4} = \frac{3x(x+3)}{2(x+1)}.$$

3. $\dfrac{a+2b}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a-2b}{b-a} \cdot \dfrac{a+b}{4b^2-a^2}$
$$\begin{aligned}
&= \frac{a+2b}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{a-2b}{b-a} \cdot \frac{a+b}{(2b+a)(2b-a)} && \text{Factorizamos}\\
&= \frac{a+2b}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{a-2b}{b-a} \cdot (-)\frac{a+b}{(2b+a)(a-2b)} && \text{Porque } 2b-a=-(a-2b)\\
&= -\frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{b-a} && \text{Simplificamos}\\
&= \frac{1}{(a-b)^2} && \text{Porque } b-a=-(a-b).
\end{aligned}$$

División de fracciones

Sean $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$ fracciones con b, c y d distintos de cero. Consideremos la división $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d}$, que en forma de fracción se expresa como $\dfrac{a/b}{c/d}$.

Sabemos que si multiplicamos el dividendo a/b y el divisor c/d por una misma expresión diferente de cero, la fracción $\dfrac{a/b}{c/d}$ no varía. Por tanto,
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \div \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \div (1) = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Así, para dividir dos fracciones multiplicamos el dividendo por el divisor invertido:
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Ejemplo 16.2

Realizar la división indicada y simplificar.

1. $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-7x+3} \div \dfrac{x^2-x-2}{2x^2+3x-2}$.
2. $\dfrac{x^3+125}{x^2-64} \div \dfrac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56}$.
3. $\dfrac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2} \div \dfrac{5a^3}{a^2b+3ab^2}$.

Solución

1. $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-7x+3} \div \dfrac{x^2-x-2}{2x^2+3x-2}$

$$= \frac{x^2-3x+2}{2x^2-7x+3} \cdot \frac{2x^2+3x-2}{x^2-x-2} \qquad \text{Multiplicamos el dividendo por el divisor invertido}$$

$$= \frac{(x-2)(x-1)}{(2x-1)(x-3)} \cdot \frac{(2x-1)(x+2)}{(x-2)(x+1)} \qquad \text{Factorizamos}$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+1)} \qquad \text{Simplificamos.}$$

2. $\dfrac{x^3+125}{x^2-64} \div \dfrac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56}$

$$= \frac{x^3+125}{x^2-64} \cdot \frac{x^2+x-56}{x^3-5x^2+25x} \qquad \text{Multiplicamos el dividendo por el divisor invertido}$$

$$= \frac{(x+5)(x^2-5x+25)}{(x+8)(x-8)} \cdot \frac{(x+8)(x-7)}{x(x^2-5x+25)} \qquad \text{Factorizamos}$$

$$= \frac{(x+5)(x-7)}{x(x-8)} \qquad \text{Simplificamos.}$$

3. $\dfrac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2} \div \dfrac{5a^3}{a^2b+3ab^2}$

$$= \frac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2} \cdot \frac{a^2b+3ab^2}{5a^3} \qquad \text{Multiplicamos el dividendo por el divisor invertido}$$

$$= \frac{3a^2}{(a+3b)^2} \cdot \frac{ab(a+3b)}{5a^3} \qquad \text{Factorizamos}$$

$$= \frac{3b}{5(a+3b)} \qquad \text{Simplificamos.}$$

En los siguientes ejemplos vamos a combinar las operaciones de multiplicación y división.

Ejemplo 16.3

Simplificar:

1. $\dfrac{a^2-3a}{b^2-2b}\cdot\dfrac{ab^2-2ab}{a^2-9}\div\dfrac{a}{b\,(a+3)}.$

2. $\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2-x-3}\cdot\dfrac{6x^2-7x-3}{x^2+2x-3}\div\dfrac{2x+3}{x+3}$

Solución

1. $\dfrac{a^2-3a}{b^2-2b}\cdot\dfrac{ab^2-2ab}{a^2-9}\div\dfrac{a}{b\,(a+3)}$

$$=\frac{a^2-3a}{b^2-2b}.\frac{ab^2-2ab}{a^2-9}\cdot\frac{b\,(a+3)}{a}$$ Convertimos la división en multiplicación

$$=\frac{a\,(a-3)}{b\,(b-2)}\cdot\frac{ab\,(b-2)}{(a+3)\,(a-3)}\cdot\frac{b\,(a+3)}{a}$$ Factorizamos

$$=ab$$ Simplificamos.

2. $\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2-x-3}\cdot\dfrac{6x^2-7x-3}{x^2+2x-3}\div\dfrac{2x+3}{x+3}$

$$=\frac{2x^2+x-3}{2x^2-x-3}\cdot\frac{6x^2-7x-3}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x+3}{2x+3}$$ Convertimos la división en multiplicación

$$=\frac{(2x+3)\,(x-1)}{(2x-3)\,(x+1)}\cdot\frac{(3x+1)\,(2x-3)}{(x+3)\,(x-1)}\cdot\frac{x+3}{2x+3}$$ Factorizamos

$$=\frac{3x+1}{x+1}$$ Simplificamos.

Lección 17

Suma y resta de fracciones

Suma de fracciones

Para sumar fracciones procedemos así:

1. Simplificamos las fracciones si es posible.
2. i) Si las fracciones tienen el mismo denominador, su suma es una fracción con el mismo denominador de las fracciones y cuyo numerador es la suma de los numeradores de las fracciones, es decir,

   $$\frac{a}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{d}, \quad d\neq 0.$$

   ii) Si las fracciones tienen distinto denominador, las convertimos en fracciones equivalentes con un mismo denominador. Como denominador común se escoge el *M.C.M.* de los denominadores de las fracciones, el cual se llama **mínimo común denominador**. Los numeradores en las fracciones equivalentes se obtienen dividiendo el mínimo común denominador entre el denominador de cada fracción y multiplicando el resultado por el numerador respectivo.

   Luego sumamos las fracciones resultantes, que tienen el mismo denominador.
3. Reducimos términos semejantes en el numerador.

Ejemplo 17.1

Realizar las operaciones indicadas y simplificar:

1. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}$.
2. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2+x}{x+1}$.
3. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}$.
4. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2+x}$.
5. $\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{1}{x^2+7x+12}$.

6. $\dfrac{2}{a+1}+\dfrac{a}{(a+1)^2}+\dfrac{a+1}{(a+1)^3}$.

7. $\dfrac{x-2}{2x^2-5x-3}+\dfrac{x-3}{2x^2-3x-2}+\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$.

8. $\dfrac{2y}{3y^2+11y+6}+\dfrac{y+1}{y^2-9}+\dfrac{1}{3y+2}$.

Solución

1. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{1+5}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

2. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2+x}{x+1}=\dfrac{x+2+x}{x+1}=\dfrac{2x+2}{x+1}=\dfrac{2(x+1)}{x+1}=2$.

3. $$\begin{aligned}\frac{1}{3}+\frac{2}{9}&=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2} && \text{Factorizamos denominadores}\\ &=\frac{3}{3^2}+\frac{2}{3^2} && \text{Mínimo común denominador } 3^2\\ &=\frac{3+2}{9}\\ &=\frac{5}{9}.\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+x}&=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x\,(x+1)} && \text{Factorizamos denominadores}\\ &=\frac{x+1}{x^2\,(x+1)}+\frac{x}{x^2\,(x+1)} && \text{Mínimo común denominador } x^2\,(x+1)\\ &=\frac{x+1+x}{x^2\,(x+1)}\\ &=\frac{2x+1}{x^2\,(x+1)}.\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x^2+7x+12}&=\frac{2}{x+3}+\frac{1}{(x+3)\,(x+4)} && \text{Factorizamos denominadores}\\ &=\frac{2\,(x+4)}{(x+3)\,(x+4)}+\frac{1}{(x+3)\,(x+4)} && \text{Mínimo común denominador } (x+3)\,(x+4)\\ &=\frac{2x+8+1}{(x+3)\,(x+4)}\\ &=\frac{2x+9}{(x+3)\,(x+4)}.\end{aligned}$$

6. $\dfrac{2}{a+1}+\dfrac{a}{(a+1)^2}+\dfrac{a+1}{(a+1)^3}=\dfrac{2}{a+1}+\dfrac{a}{(a+1)^2}+\dfrac{1}{(a+1)^2}$ Simplificamos las fracciones dadas

$$=\frac{2(a+1)}{(a+1)^2}+\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+1)^2}$$ Mínimo común denominador $(a+1)^2$

$$=\frac{2(a+1)+a+1}{(a+1)^2}$$

$$=\frac{(a+1)(2+1)}{(a+1)^2}$$

$$=\frac{3(a+1)}{(a+1)^2}$$

$$=\frac{3}{a+1}.$$

Nota: En la práctica la reducción al mínimo común denomindor y la suma se hacen en un solo paso.

7. $\dfrac{x-2}{2x^2-5x-3}+\dfrac{x-3}{2x^2-3x-2}+\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$

$$=\frac{x-2}{(2x+1)(x-3)}+\frac{x-3}{(2x+1)(x-2)}+\frac{2x-1}{(x-3)(x-2)}$$ Factorizamos denominadores

$$=\frac{(x-2)^2+(x-3)^2+(2x-1)(2x+1)}{(2x+1)(x-3)(x-2)}$$ Mínimo común denominador $(2x+1)(x-3)(x-2)$

$$=\frac{x^2-4x+4+x^2-6x+9+4x^2-1}{(2x+1)(x-3)(x-2)}$$

$$=\frac{6x^2-10x+12}{(2x+1)(x-3)(x-2)}.$$

8. $\dfrac{2y}{3y^2+11y+6}+\dfrac{y+1}{y^2-9}+\dfrac{1}{3y+2}$

$$=\frac{2y}{(3y+2)(y+3)}+\frac{y+1}{(y+3)(y-3)}+\frac{1}{3y+2}$$ Factorizamos denominadores

$$=\frac{2y(y-3)+(y+1)(3y+2)+(y^2-9)}{(3y+2)(y+3)(y-3)}$$ Mínimo común denominador $(3y+2)(y+3)(y-3)$

$$=\frac{2y^2-6y+3y^2+5y+2+y^2-9}{(3y+2)(y+3)(y-3)}$$

$$=\frac{6y^2-y-7}{(3y+2)(y+3)(y-3)}.$$

Resta o diferencia de fracciones

Para restar fracciones procedemos así:

1. Simplificamos las fracciones si es posible.

2. i) Si las fracciones tienen el mismo denominador, su resta ó diferencia es una fracción con el mismo denominador de las fracciones y cuyo numerador es la diferencia entre el numerador del minuendo y el numerador del sustraendo, es decir,

$$\frac{a}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{d}, \quad d \neq 0.$$

   ii) Si las fracciones tienen distinto denominador, las convertimos en fracciones equivalentes con un mismo denominador. Como denominador común se escoge el **mínimo común denominador** de los denominadores de las fracciones.

   Luego restamos las fracciones resultantes, que tienen el mismo denominador.

3. Reducimos términos semejantes en el numerador.

Ejemplo 17.2

1. De $\dfrac{z+3}{z^2-9}$ restar $\dfrac{z}{z-3}$.

2. De $\dfrac{1}{x-4}$ restar $\dfrac{1}{x-3}$.

3. Restar $\dfrac{x}{a^2-x^2}$ de $\dfrac{a+x}{(a-x)^2}$.

4. Simplificar $\dfrac{a^2+b^2}{a^3-b^3} - \dfrac{a+b}{2a^2+2ab+2b^2} - \dfrac{1}{2a-2b}$.

Solución

1. $$\begin{aligned} \frac{z+3}{z^2-9} - \frac{z}{z-3} &= \frac{z+3}{(z+3)(z-3)} - \frac{z}{z-3} && \text{Factorizamos denominadores} \\ &= \frac{1}{z-3} - \frac{z}{z-3} && \text{Simplificamos las fracciones} \\ &= \frac{1-z}{z-3}. \end{aligned}$$

2. $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{x-3}{(x-4)(x-3)}-\dfrac{x-4}{(x-4)(x-3)}$ Mínimo común denominador $(x-4)(x-3)$

$$=\frac{(x-3)-(x-4)}{(x-4)(x-3)}$$
$$=\frac{x-3-x+4}{(x-4)(x-3)}$$
$$=\frac{1}{(x-4)(x-3)}.$$

Nota: En la práctica, para restar fracciones la reducción al mínimo común denominador y las resta se hacen simultáneamente, como en la suma, pero teniendo cuidado con el signo del sustraendo.

3. $\dfrac{a+x}{(a-x)^2}-\dfrac{x}{a^2-x^2}=\dfrac{a+x}{(a-x)^2}-\dfrac{x}{(a+x)(a-x)}$ Factorizamos denominadores

$$=\frac{(a+x)^2-x(a-x)}{(a-x)^2(a+x)}$$ Mínimo común denominador $(a-x)^2(a+x)$

$$=\frac{a^2+2ax+x^2-ax+x^2}{(a-x)^2(a+x)}$$
$$=\frac{a^2+ax+2x^2}{(a-x)^2(a+x)}.$$

4. $\dfrac{a^2+b^2}{a^3-b^3}-\dfrac{a+b}{2a^2+2ab+2b^2}-\dfrac{1}{2a-2b}$

$$=\frac{a^2+b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}-\frac{a+b}{2(a^2+ab+b^2)}-\frac{1}{2(a-b)}$$ Factorizamos denominadores

$$=\frac{2(a^2+b^2)-(a+b)(a-b)-(a^2+ab+b^2)}{2(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$ Mínimo común denominador $2(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$=\frac{2a^2+2b^2-(a^2-b^2)-(a^2+ab+b^2)}{2(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$
$$=\frac{2a^2+2b^2-a^2+b^2-a^2-ab-b^2}{2(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$
$$=\frac{2b^2-ab}{2(a-b)(a^2+ab+b^2)}.$$

En el siguiente ejemplo combinamos suma y resta de fracciones.

Ejemplo 17.3

Simplificar:

1. $\dfrac{1}{ax}-\dfrac{1}{a^2+ax}+\dfrac{1}{a+x}$.

2. $\dfrac{x}{x^2+2x-3}+\dfrac{x-3}{(1-x)(x+2)}+\dfrac{1}{x+2}$.

Solución

1. $$\begin{aligned}
\frac{1}{ax}-\frac{1}{a^2+ax}+\frac{1}{a+x} &= \frac{1}{ax}-\frac{1}{a(a+x)}+\frac{1}{a+x}\\
&= \frac{a+x-x+ax}{ax(a+x)} && \text{Mínimo común denominador } ax(a+x)\\
&= \frac{a+ax}{ax(a+x)}\\
&= \frac{a(1+x)}{ax(a+x)}\\
&= \frac{1+x}{x(a+x)}.
\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}
&\frac{x}{x^2+2x-3}+\frac{x-3}{(1-x)(x+2)}+\frac{1}{x+2}\\
&= \frac{x}{(x-1)(x+3)}+\frac{x-3}{(1-x)(x+2)}+\frac{1}{x+2}\\
&= \frac{x}{(x-1)(x+3)}+\frac{x-3}{-(x-1)(x+2)}+\frac{1}{x+2} && 1-x=-(x-1)\\
&= \frac{x}{(x-1)(x+3)}-\frac{x-3}{(x-1)(x+2)}+\frac{1}{x+2} && \text{Cambio signo en el denominador, cambia el signo fracción}\\
&= \frac{x(x+2)-(x-3)(x+3)+(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x+2)} && \text{Mínimo común denominador } (x-1)(x+3)(x+2)\\
&= \frac{x^2+2x-(x^2-9)+x^2+2x-3}{(x-1)(x+3)(x+2)}\\
&= \frac{x^2+4x+6}{(x-1)(x+3)(x+2)}.
\end{aligned}$$

Lección 18

Lección 18: Potenciación y radicación

Potenciación

En la Lección 1 se definió la n-ésima potencia a^n de una expresión algebraica a, para n un entero cualquiera, y se enunciaron las leyes básicas para los exponentes.

Resta definir las potencias con exponente un número racional, lo cual se hará al final de esta lección.

Radicación

En potenciación consideramos las potencias de un número dado. Por ejemplo,

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \ \ , \ \ 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \ \ , \cdots$

En radicación, dado un número, nos interesa otro tal que cierta potencia de él sea el número dado.

Raíz cuadrada

Por ejemplo, dado el número 9, un número positivo que elevado al cuadrado nos da 9 es 3, porque $3^2 = 9$. Se utiliza la notación $\sqrt[2]{9}$ o también $\sqrt{9}$ para representar este número positivo. Es decir,

$$\sqrt{9} = 3 \ \text{ ya que } \ 3^2 = 9 \ \text{ y } 3 \ \text{ es positivo.}$$

$\sqrt{9}$ se lee raíz cuadrada principal de 9 o simplemente raíz cuadrada de 9.

En general, si b es un número positivo,
$\sqrt{b} = a$ significa que $a^2 = b$ y a es positivo.

$\sqrt{b}$ se lee **raíz cuadrada principal** de b o simplemente **raíz cuadrada** de b.

Observamos que si b es positivo y $a^2 = b$, entonces también $(-a)^2 = b$. Así, si b es positivo hay dos números, uno positivo y el otro negativo, que tienen como cuadrado a b. $\sqrt{b}$ representa únicamente al positivo.

Ejemplo 18.1

1. $\sqrt{4} = 2$ puesto que $2^2 = 4$ y 2 es positivo.
2. $\sqrt{16} = 4$ puesto que $4^2 = 16$ y 4 es positivo.
3. $\sqrt{\dfrac{36}{25}} = \dfrac{6}{5}$ puesto que $\left(\dfrac{6}{5}\right)^2 = \dfrac{36}{25}$ y $\dfrac{6}{5}$ es positivo.

Si $b = 0$, el único número a tal que $a^2 = 0$ es $a = 0$. Expresamos ésto escribiendo $\sqrt{0} = 0$. Así,

$$\sqrt{0} = 0 \ \text{ significa } \ \text{que} \ \ 0^2 = 0.$$

Por último observamos que si b es un número negativo, no hay un número a tal que $a^2 = b$ (¿Por qué?). Así que

$$\boxed{\text{La expresión } \sqrt{b} \text{ tiene sentido sólo cuando } b \text{ es positivo o es cero.}}$$

Ejemplo 18.2

$\sqrt{-25}$ no está definido, porque no hay un número real a tal que $a^2 = -25$.

Raíz cúbica

Por ejemplo, dado el número 8, el único número que elevado al cubo da 8 es 2. Se emplea la notación $\sqrt[3]{8}$ para representar ese número. Es decir,

$$\sqrt[3]{8} = 2 \ \text{ significa } \ \text{que} \ \ 2^3 = 8.$$

Similarmente,

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \ \text{ significa } \ \text{que} \ \ (-2)^3 = -8.$$

$$\sqrt[3]{0} = 0 \ \text{ significa } \ \text{que} \ \ 0^3 = 0.$$

En general, dado cualquier número b (positivo, cero o negativo) hay un único número a tal que

$$a^3 = b.$$

Ese único número se denota $\sqrt[3]{b}$, que se lee **raíz cúbica principal** de b o simplemente **raíz cúbica** de b. Así,

$$\boxed{\sqrt[3]{b} = a \text{ significa que } a^3 = b}$$

En este caso $\sqrt[3]{b}$ es positivo si b es positivo, es negativo si b es negativo y es 0 si b es 0.

Ejemplo 18.3

1. $\sqrt[3]{64} = 4$ puesto que $4^3 = 64$.
2. $\sqrt[3]{-64} = -4$ puesto que $(-4)^3 = -64$.

3. $\sqrt[3]{\dfrac{64}{27}} = \dfrac{4}{3}$ puesto que $\left(\dfrac{4}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27}$.

Raíz n-ésima

Sea n un entero positivo mayor o igual que 2 ($n = 2,\ 3,\ 4,\ \dots$).

Dado un número b, nos interesan los números a tales que

$$a^n = b.$$

Es necesario considerar por separado los casos n par y n impar.

Se tiene lo siguiente:

- Si n es par y b es positivo, hay un único número positivo a tal que $a^n = b$. Ese único número positivo se representa como $\sqrt[n]{b}$, que se lee **raíz *n*-ésima principal** de b o simplemente **raíz *n*-ésima** de b.

Así, para n par y b positivo,
$\sqrt[n]{b} = a$ significa que $a^n = b$ y a es positivo.

  Por ejemplo,

  $$\sqrt[4]{16} = 2 \text{ puesto que } 2^4 = 16 \text{ y } 2 \text{ es positivo.}$$

  Observe que $2^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$, pero $\sqrt[4]{16}$ representa únicamente al número positivo 2.

  Nótese que si n es par, pero b es negativo, no hay un número a tal que $a^n = b$.

  Por ejemplo, tomando $n = 4$ y $b = -16$, no hay un número a tal que $a^4 = -16$.

  Todo lo anterior es como en el caso $n = 2$, es decir, como en la raíz cuadrada.

- Si n es impar y b es cualquiera, hay un único número a tal que $a^n = b$. Ese único número se representa como $\sqrt[n]{b}$, que se lee como en el caso anterior.

Así, para n impar y b cualquiera,
$\sqrt[n]{b} = a$ significa que $a^n = b$.

  Por ejemplo,

  $\sqrt[5]{32} = 2$, puesto que $2^5 = 32$.

  $\sqrt[5]{-32} = -2$, puesto que $(-2)^5 = -32$.

  En este caso $\sqrt[n]{b}$ es positivo si b es positivo y es negativo si b lo es.

  Esta situación es como en el caso $n = 3$, es decir, como en la raíz cúbica.

- Si $b=0$ y n es par o impar, el único número a tal que $a^n=0$ es $a=0$. Expresamos ésto escribiendo $\sqrt[n]{0}=0$. Así,

$$\sqrt[n]{0}=0 \text{ significa que } 0^n=0.$$

  Por ejemplo, $\sqrt[4]{0}=\sqrt[5]{0}=0$.

Observe que

$\sqrt[n]{b}$ está definida o existe para todo número b si n es impar
y sólo está definida para b positivo o cero si n es par.

Ejemplo 18.4

1. $\sqrt[4]{625}=5$ ya que $5^4=625$ y 5 es positivo.
2. $\sqrt[4]{-16}$ no está definida porque no hay un número a tal que $a^4=-16$.

Una expresión de la forma $\sqrt[n]{b}$, donde b es una expresión algebraica, se llama **expresión radical**, la expresión b se llama **radicando** o **expresión subradical** y n es el **índice del radical**. Al símbolo $\sqrt{\ }$ se le llama **signo radical**.

Potenciación: Caso exponentes racionales

$\sqrt[n]{b}$, si existe, lo expresamos también como $b^{1/n}$:

$$\sqrt[n]{b}=b^{1/n}.$$

Observe que como $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=b$ entonces se tiene $\left(b^{1/n}\right)^n=b$.

Si $b^{1/n}$ está definido y m es un entero diferente de cero, se define la potencia $b^{m/n}$ así:

$$b^{m/n}=\left(b^{1/n}\right)^m.$$

En esta definición suponemos que m y n no tienen factores comunes.

Con lo anterior quedan definidas las potencias para cualquier exponente racional.

Se puede comprobar que las leyes de los exponentes son válidas también para exponentes racionales.

Ejemplo 18.5

Evaluar las siguientes expresiones:

1. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{1/2}$.

2. $\left(\dfrac{-27}{8}\right)^{2/3}$.

3. $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{-1/2}$.

Solución

1. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{1/2} = \dfrac{4^{1/2}}{9^{1/2}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$.

2. $\left(\dfrac{-27}{8}\right)^{2/3} = \dfrac{(-27)^{2/3}}{(8)^{2/3}} = \dfrac{\left((-27)^{1/3}\right)^2}{\left((8)^{1/3}\right)^2} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{-27}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \dfrac{(-3)^2}{2^2} = \dfrac{9}{4}$.

3. $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{-1/2} = \dfrac{9^{-1/2}}{(25)^{-1/2}} = \dfrac{(25)^{1/2}}{9^{1/2}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \dfrac{5}{3}$.

Ejemplo 18.6

Simplificar las siguientes expresiones, escribiendo la respuesta con exponentes positivos:

1. $\left(2x^4y^{2/5}\right)^3\left(8y^{-2}\right)^{2/3}$.

2. $\dfrac{\left(y^{10}z^{-5}\right)^{1/5}}{\left(y^{-2}z^3\right)^{1/3}}$.

Solución

1. $$\begin{aligned}\left(2x^4y^{2/5}\right)^3\left(8y^{-2}\right)^{2/3} &= \left(2^3x^{12}y^{6/5}\right)\left(8^{2/3}y^{-4/3}\right)\\ &= \left(8x^{12}y^{6/5}\right)\left(\sqrt[3]{8}\right)^2y^{-4/3}\\ &= 32x^{12}y^{6/5-4/3}\\ &= 32x^{12}y^{-2/15}\\ &= \frac{32x^{12}}{y^{2/15}}.\end{aligned}$$

2. $\dfrac{\left(y^{10}z^{-5}\right)^{1/5}}{\left(y^{-2}z^3\right)^{1/3}} = \dfrac{y^{10/5}z^{-5/5}}{y^{-2/3}z^{3/3}} = \dfrac{y^2z^{-1}}{y^{-2/3}z} = \dfrac{y^2y^{2/3}}{zz} = \dfrac{y^{8/3}}{z^2}$.

Lección 19

Ecuaciones de segundo grado o ecuaciones cuadráticas

Una **ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática en una variable x** es toda ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ donde } a, \ b, \ c \text{ denotan números fijos y } a \neq 0.$$

Ejemplo 19.1

1. La ecuación $4x^2 + 7x - 9 = 0$ es una ecuación cuadrática en x con $a = 4$, $b = 7$ y $c = -9$.
2. La ecuación $y^2 - 5y = -3$ es una ecuación cuadrática en y, ya que si sumamos 3 en los dos miembros obtenemos $y^2 - 5y + 3 = 0$ que es una ecuación de la forma $ay^2 + by + c = 0$ con $a = 1$, $b = -5$ y $c = 3$.
3. La ecuación $\frac{2}{5}z^2 = 4$ es una ecuación cuadrática en z ya que si multiplicamos los dos miembros por 5 y luego sumamos -20 a ambos lados, obtenemos $2z^2 - 20 = 0$, que es una ecuación de la forma $az^2 + bz + c = 0$ con $a = 2$, $b = 0$ y $c = -20$.

Las **raíces o soluciones** de una ecuación cuadrática en una variable son los valores de la variable que satisfacen la ecuación, es decir, son los números que al ser reemplazados por la variable dan como resultado un enunciado verdadero.

Ejemplo 19.2

1. 2 y -3 son soluciones de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$, ya que si reemplazamos x por 2 en la ecuación obtenemos el enunciado verdadero $0 = 0$, porque al sustituir x por 2 en el primer miembro se tiene: $(2)^2 + (2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$.

   De igual forma al reemplazar x por -3 obtenemos: $(-3)^2 + (-3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$.

   Por otra parte, 5 no es solución de la ecuación porque al reemplazar x por 5 en el primer miembro se obtiene $(5)^2 + (5) - 6 = 25 + 5 - 6 = 24 \neq 0$.
2. 5 y -5 son soluciones de $z^2 = 25$, ya que $(5)^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$.

¿Cómo encontrar las raíces de una ecuación cuadrática?

Para resolver una ecuación cuadrática en una variable x podemos proceder como sigue:

- Realizamos las operaciones necesarias para que un miembro de la ecuación sea un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$ y el otro miembro sea igual a 0.
- Factorizamos, si es posible, el polinomio como producto de dos factores lineales, con lo cual la ecuación obtenida en el paso anterior es el producto de estos factores igual a cero. Como el producto de dos factores es cero si y sólo si al menos uno de ellos es cero, obtenemos dos ecuaciones de primer grado cuyas soluciones son las soluciones de la ecuación original.

Apliquemos este procedimiento en algunos ejemplos.

Ejemplo 19.3

En cada numeral, hallar las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática dada.

1. $x^2 + 11x = -24$.
2. $6x + 8 - 9x^2 = 0$.
3. $(z+3)^2 - (z+3) - 20 = 0$.
4. $5y^2 - 4y = 0$.
5. $x^2 - 10x + 25 = 0$.
6. $9x^2 - 6x - 8 = 0$.

Solución

1.
$$
\begin{array}{rl}
x^2 + 11x = -24 & \text{Ecuación dada} \\
x^2 + 11x + 24 = -24 + 24 & \text{Sumamos 24 a los dos miembros de la ecuación} \\
(x+8)(x+3) = 0 & \text{Factorizamos el polinomio de la izquierda} \\
x + 8 = 0 \ \text{ ó } \ x + 3 = 0 & \text{El producto de dos factores es 0 si y sólo si al menos uno de ellos es 0} \\
x = -8 \ \text{ ó } \ x = -3 & \text{Resolvemos las dos ecuaciones lineales.}
\end{array}
$$

Luego, $x = -8$ y $x = -3$ son las raíces o soluciones de la ecuación $x^2 + 11x = -24$.

Para comprobar que estos dos valores de x son soluciones de la ecuación reemplazamos cada uno de ellos en la ecuación original.

Si $x = -8$:

$$
\begin{aligned}
(-8)^2 + 11(-8) &= -24 \\
64 - 88 &= -24 \\
-24 &= -24 \qquad \text{Enunciado verdadero.}
\end{aligned}
$$

Si $x=-3$:

$$\begin{aligned}(-3)^2+11(-3)&=-24\\ 9-33&=-24\\ -24&=-24 \qquad \text{Enunciado verdadero}\end{aligned}$$

2.

$6x+8-9x^2=0$	Ecuación dada
$-9x^2+6x+8=0$	Organizamos el polinomio de la izquierda
$9x^2-6x-8=0$	Multiplicamos por -1 ambos miembros de la ecuación
$(3x+2)(3x-4)=0$	Factorizamos el polinomio de la izquierda
$3x+2=0$ ó $3x-4=0$	El producto de dos factores es 0 si y sólo si al menos uno de ellos es 0
$x=-\dfrac{2}{3}$ ó $x=\dfrac{4}{3}$	Resolvemos las dos ecuaciones lineales.

Luego, $x=-\dfrac{2}{3}$ y $x=\dfrac{4}{3}$ son las soluciones de la ecuación $6x+8-9x^2=0$.

En efecto, si $x=-\dfrac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}6\left(-\frac{2}{3}\right)+8-9\left(-\frac{2}{3}\right)^2&=0\\ -4+8-4&=0\\ 0&=0 \qquad \text{Enunciado verdadero}\end{aligned}$$

Es decir, $x=-\dfrac{2}{3}$ satisface la ecuación.

Si $x=\dfrac{4}{3}$:

$$\begin{aligned}6\left(\frac{4}{3}\right)+8-9\left(\frac{4}{3}\right)^2&=0\\ 8+8-16&=0\\ 0&=0 \qquad \text{Enunciado verdadero}\end{aligned}$$

Luego, $x=\dfrac{4}{3}$ también satisface la ecuación.

3. Una manera de proceder consiste en desarrollar $(z+3)^2$ y luego reunir términos semejantes con lo cual se obtiene la ecuación

$$z^2+5z-14=0$$

que se resuelve como en los ejemplos anteriores.

Otra manera de proceder es la siguiente:

Haciendo $u = z + 3$ en la ecuación dada obtenemos $u^2 - u - 20 = 0$ que es una ecuación cuadrática en u.

Resolvemos la ecuación $u^2 - u - 20 = 0$:

$u^2 - u - 20 = (u + 4)(u - 5) = 0$.

Luego $u = -4$ ó $u = 5$.

Ahora como $u = z + 3$, reemplazamos los valores de u en esta ecuación, así:

Si $u = -4$, entonces $-4 = z + 3$, o sea, $z = -7$, y si $u = 5$, tenemos que $5 = z + 3$, luego $z = 2$.

Por tanto, los valores de z que satisfacen la ecuación $(z + 3)^2 - (z + 3) - 20 = 0$ son $z = -7$ y $z = 2$.

Comprobamos que efectivamente éstas son las raíces de la ecuación original:

Si $z = -7$, entonces $(-7 + 3)^2 - (-7 + 3) - 20 = (-4)^2 + 4 - 20 = 16 + 4 - 20 = 0$, luego $z = -7$ es solución de la ecuación.

Con $z = 2$ tenemos que $(2 + 3)^2 - (2 + 3) - 20 = 25 - 5 - 20 = 0$, por tanto $z = 2$ también es solución de la ecuación.

El último procedimiento que realizamos se conoce como **cambio de variable** y es muy utilizado en matemáticas.

4. La ecuación dada es de la forma $ay^2 + by + c = 0$, con $a = 5$, $b = -4$ y $c = 0$, por lo que la factorización del miembro de la izquierda es aún más sencilla.

$5y^2 - 4y = 0$	Ecuación dada
$y(5y - 4) = 0$	Factor común y
$y = 0$ ó $5y - 4 = 0$	El producto de dos factores es 0 si y sólo si al menos uno de ellos es 0
$y = 0$ ó $y = \frac{4}{5}$	Resolvemos las dos ecuaciones lineales.

Y así, $y = 0$ y $y = \frac{4}{5}$ son las raíces de la ecuación $5y^2 - 4y = 0$.

Verificamos que efectivamente son las raíces, reemplazándolas en la ecuación original:

Para $y = 0$ tenemos $5(0)^2 - 4(0) = 5(0) - 4(0) = 0 - 0 = 0$.

Si $y = \frac{4}{5}$, entonces $5\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 4\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\frac{16}{25}\right) - \frac{16}{5} = \frac{16}{5} - \frac{16}{5} = 0$.

5. Factorizando el miembro izquierdo de la ecuación obtenemos

$$
\begin{aligned}
(x-5)^2 &= 0 \\
(x-5)(x-5) &= 0.
\end{aligned}
$$

Al igualar cada factor a cero obtenemos $x-5=0$, ó $x-5=0$. Por tanto cada ecuación tiene una solución, $x=5$. Como $x-5$ aparece dos veces como factor en la ecuación, al número 5 se le llama **raíz doble**, ó **raíz de multiplicidad dos** de la ecuación.

$x=5$ satisface la ecuación $x^2-10x+25=0$, ya que $(5)^2-10(5)+25=25-50+25=0$.

6. Aunque el polinomio $9x^2-6x-8$ es un trinomio de la forma ax^2+bx+c que puede factorizarse como $(3x+2)(3x-4)$, vamos a factorizarlo usando otro de los métodos estudiados:

$$
\begin{array}{rl}
9x^2-6x-8=0 & \text{Ecuación dada} \\
9x^2-6x=8 & \text{Sumamos 8 a ambos miembros de la ecuación} \\
9x^2-6x+1=8+1 & \text{Completamos el trinomio cuadrado perfecto} \\
(3x-1)^2=9 & \text{Factorizamos el lado izquierdo} \\
(3x-1)^2-9=0 & \text{Sumamos } -9 \text{ a ambos lados} \\
[(3x-1)+3][(3x-1)-3]=0 & \text{Factorizamos el lado izquierdo} \\
(3x+2)(3x-4)=0 & \text{Realizamos las operaciones indicadas} \\
3x+2=0 \text{ ó } 3x-4=0 & \begin{array}{l}\text{El producto de dos factores es } 0 \\ \text{si y sólo si al menos uno de ellos es } 0\end{array} \\
x=-\dfrac{2}{3} \text{ ó } x=\dfrac{4}{3} & \text{Encontramos las raíces de la ecuación.}
\end{array}
$$

Es fácil comprobar que $x=-\dfrac{2}{3}$ y $x=\dfrac{4}{3}$ son raíces de la ecuación dada.

Fórmula cuadrática

En algunas ecuaciones cuadráticas no es fácil factorizar el polinomio cuadrático.

Veremos a continuación que aplicando a la ecuación $ax^2+bx+c=0$ el método utilizado en el último ejemplo, se obtiene una fórmula general para encontrar las raíces de las ecuaciones cuadráticas:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=0 && \text{Ecuación dada}\\
ax^2+bx&=-c && \text{Sumamos } -c \text{ a ambos lados}\\
x^2+\frac{b}{a}x&=-\frac{c}{a} && \text{Dividimos por } a \text{ a ambos lados}\\
x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2&=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 && \text{Completamos el trinomio cuadrado perfecto}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} && \text{Factorizamos el lado izquierdo}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2-4ac}{4a^2} && \text{Sumamos las fracciones en el lado derecho}
\end{aligned}
$$

Si b^2-4ac es un número negativo, la ecuación anterior no tiene raíces en los reales, y por lo tanto la ecuación original tampoco.

Suponiendo entonces que b^2-4ac es un número mayor o igual que 0, continuamos como sigue:

$$
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0 \qquad \text{Sumamos } -\frac{b^2-4ac}{4a^2} \text{ a ambos lados en la ecuación anterior.}
$$

$$
\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right]=0 \quad \begin{array}{l}\text{Factorizamos el lado izquierdo}\\ \text{considerándolo como una}\\ \text{diferencia de cuadrados}\end{array}
$$

$$
\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=0 \qquad \text{ó} \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=0
$$

$$
\begin{aligned}
x+\frac{b}{2a}&=-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} &\quad \text{ó} \quad & x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} &&\\
x&=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} &\quad \text{ó} \quad & x=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} && \text{Resolvemos las ecuaciones lineales}\\
x&=-\frac{b}{2a}-\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac} &\quad \text{ó} \quad & x=-\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac} &&\\
x&=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &\quad \text{ó} \quad & x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{Realizamos las operaciones indicadas}
\end{aligned}
$$

Entonces las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ son

$$
x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},
$$

que podemos escribir así:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esta fórmula es conocida como la **fórmula cuadrática.**

La expresión b^2-4ac se conoce con el nombre de **discriminante** de la ecuación $ax^2+bx+c=0$; la denotaremos con la letra D, es decir, $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$. Dicha cantidad proporciona información sobre las soluciones de la ecuación, sin hallarlas, así:

Si D es un número positivo, la ecuación tiene dos soluciones que son números reales distintos.

Si $D = 0$, la ecuación tiene dos soluciones que son números reales iguales, o en otras palabras, una raíz doble o de multiplicidad 2.

Si D es un número negativo, la ecuación no tiene raíces reales.

Nota: La fórmula cuadrática se obtuvo bajo la condición $b^2 - 4ac$ mayor o igual a cero. Sin embargo, en la práctica, no es necesario chequear esa condición antes de emplear la fórmula.

Ejemplo 19.4

Resolver la ecuación dada utilizando la fórmula cuadrática.

1. $3x^2 - 5x + 2 = 0$.
2. $2x^2 + 7x + 3 = 0$.
3. $x^2 - 36 = 0$.
4. $w^2 - 6w + 9 = 0$.
5. $y^2 + 2y + 3 = 0$.

Solución:

1. Utilizando la fórmula cuadrática con $a = 3$, $b = -5$ y $c = 2$ tenemos:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}.$$

Entonces las raíces de la ecuación son

$$x = \frac{5+1}{6} \text{ y } x = \frac{5-1}{6}, \text{ o sea } x = \frac{6}{6} = 1 \text{ y } x = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \text{ es decir, } x = 1 \text{ y } x = \frac{2}{3}.$$

Observe que se obtuvieron dos raíces reales distintas porque el discriminante $D = 1$ es positivo.

Reemplazamos los valores de x en la ecuación original para comprobar que éstas sí son las raíces:

Para $x = 1$ tenemos que $3\,(1)^2 - 5\,(1) + 2 = 3 - 5 + 2 = 0$.

Si $x = \dfrac{2}{3}$, entonces $3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 5\left(\dfrac{2}{3}\right) + 2 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{10}{3} + 2 = -2 + 2 = 0$.

2. En este caso $a = 2$, $b = 7$ y $c = 3$, entonces
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\,(2)\,(3)}}{2\,(2)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4}.$$

Luego, las raíces de la ecuación son
$$x = \frac{-7+5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ y } x = \frac{-7-5}{4} = \frac{-12}{4} = -3, \text{ es decir, } x = -\frac{1}{2} \text{ y } x = -3.$$

Verificamos en la ecuación original:

Si $x = -\dfrac{1}{2}$, entonces $2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 7\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{2} + 3 = -3 + 3 = 0$.

Si $x = -3$, tenemos $2\,(-3)^2 + 7\,(-3) + 3 = 18 - 21 + 3 = -3 + 3 = 0$.

3. Usando la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = 0$ y $c = -36$, tenemos:
$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4\,(1)\,(-36)}}{2\,(1)} = \frac{\pm\sqrt{144}}{2} = \frac{\pm 12}{2} = \pm 6.$$

Otra forma de proceder es la siguiente:
$$\begin{aligned} x^2 - 36 &= 0 \\ x^2 &= 36 \\ x &= \pm\sqrt{36} \\ x &= \pm 6. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $x = \pm 6$ son las raíces de la ecuación $x^2 - 36 = 0$.

4. Usando la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = -6$ y $c = 9$, tenemos:
$$w = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\,(1)\,(9)}}{2\,(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = 3.$$

Luego, $w = 3$ es una raíz de multiplicidad 2. Observe que $D = 0$.

Si resolvemos la ecuación factorizando el miembro de la izquierda tenemos que:

$w^2 - 6w + 9 = 0$ es equivalente a $(w-3)^2 = 0$, o $(w-3)\,(w-3) = 0$

y obtenemos nuevamente $w = 3$ como una raíz de multiplicidad 2.

5. Usando la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$ tenemos:

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\,(1)\,(3)}}{2\,(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}.$$

Como $D = -8$ es un número negativo, $\sqrt{-8}$ no está definido y por tanto la ecuación $y^2 + 2y + 3 = 0$ no tiene raíces en los reales.

Lección 20

Solución de problemas con ecuaciones cuadráticas en una variable

Como vimos en el tema de ecuaciones lineales, tanto en matemáticas como en otras ciencias, y aún en situaciones de la vida real, encontramos problemas que involucran dos o más cantidades relacionadas entre sí. Algunos de estos problemas al plantearlos matemáticamente, conducen a una ecuación cuadrática.

Para resolver este tipo de problemas es conveniente que procedamos de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Leemos cuidadosamente el problema resaltando la información más importante y, cuando sea posible, hacemos un dibujo que ilustre la situación planteada, indicando las cantidades conocidas en el problema.

2. Identificamos claramente la cantidad o cantidades desconocidas (variables o incógnitas) que debemos encontrar. Por lo general, éstas aparecen en la pregunta que plantea el problema.

   Asignamos una letra a una de las cantidades desconocidas y, usando la información del problema, expresamos las otras cantidades en términos de dicha letra. Si es posible, las identificamos en el dibujo hecho en el paso 1.

3. Encontramos en el enunciado del problema o en el dibujo, la información que nos pemita relacionar las cantidades y las variables definidas en los pasos 1. y 2.

4. Planteamos una ecuación que nos permita expresar esta relación.

5. Resolvemos la ecuación, verificamos la respuesta y respondemos en palabras las preguntas planteadas.

Problema 20.1

A tiene 3 años más que B y la suma de los cuadrados de las edades de A y de B es 317 años. Hallar ambas edades.

Solución

Debemos hallar la edad de A y la de B.

Llamemos x a la edad de B. Como A tiene 3 años más que B entonces la edad de A es $x+3$.

$$\begin{aligned} x &= \text{ edad de B} \\ x+3 &= \text{ edad de A.} \end{aligned}$$

Como la suma de los cuadrados de ambas edades es 317 entonces

$$x^2 + (x+3)^2 = 317.$$

Para hallar x debemos resolver esta ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 + (x+3)^2 &= 317 \quad \text{Desarrollamos } (x+3)^2 \\ x^2 + x^2 + 6x + 9 &= 317 \\ 2x^2 + 6x - 308 &= 0 \\ 2(x^2 + 3x - 154) &= 0 \\ x^2 + 3x - 154 &= 0. \end{aligned} \tag{20.1}$$

Descomponemos 154 en sus factores primos para tratar de factorizar el primer miembro de la ecuación:

$$\begin{array}{r|l} 154 & 2 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Como $154 = (14)(11)$ y $14 - 11 = 3$ entonces $x^2 + 3x - 154 = (x+14)(x-11)$. Así, la ecuación (20.1) se convierte en

$$(x+14)(x-11) = 0.$$

Luego, $x + 14 = 0$ ó $x - 11 = 0$ y así $x = -14$ ó $x = 11$.

De estas dos soluciones de la ecuación cuadrática (20.1), $x = -14$ no tiene sentido para el problema porque x, que representa la edad de B, no puede ser un número negativo. Luego, $x = 11$.

Por lo tanto, la edad de B es $x = 11$ años y la edad de A es $x + 3 = 11 + 3 = 14$ años.

Verificamos que la respuesta satisface las condiciones del problema:

Efectivamente A tiene 3 años más que B y además la suma de los cuadrados de sus edades es $(14)^2 + (11)^2 = 196 + 121 = 317$.

Problema 20.2

Un salón de clase tiene forma rectangular y su largo excede a su ancho en 4 metros. Si tanto el largo como el ancho se aumentan en 4 metros, el área del salón será el doble. Hallar las dimensiones del salón.

Solución

Debemos hallar el largo y el ancho del salón de clase.

Si x es el ancho, en metros, del salón entonces

$$\begin{aligned} x+4 &= \text{ largo del salón} \\ x(x+4) &= \text{ área del salón.} \end{aligned}$$

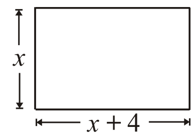

Figura 20.1

Si tanto el largo como el ancho se aumentan en 4 metros tenemos:

$$\begin{aligned} x+4 &= \text{ ancho aumentado del salón} \\ (x+4)+4 = x+8 &= \text{ largo aumentado del salón} \\ (x+4)(x+8) &= \text{ área aumentada del salón.} \end{aligned}$$

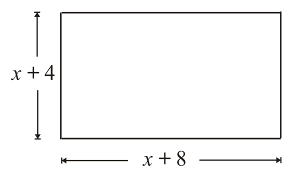

Figura 20.2

Como al aumentar el largo y el ancho en 4 metros, el área se duplica tenemos que

$$\begin{aligned} \text{área aumentada del salón} &= 2(\text{área original del salón }) \\ (x+4)(x+8) &= 2x(x+4). \end{aligned}$$

Efectuamos operaciones y simplificamos:

$$\begin{aligned} x^2+12x+32 &= 2x^2+8x \\ 0 &= (2x^2-x^2)+(8x-12x)-32 \\ 0 &= x^2-4x-32 \\ 0 &= (x-8)(x+4). \end{aligned}$$

Luego, $x-8=0$ ó $x+4=0$ y así $x=8$ ó $x=-4$.

La segunda solución no tiene sentido para el problema porque x, que representa el largo del salón, no puede ser un número negativo. Luego, $x=8$.

Por lo tanto, las dimensiones del salón son: ancho $x=8$ m y largo $x+4=8+4=12$ m.

Verificar que la respuesta satisface las condiciones del problema.

Problema 20.3

Se compró cierto número de cartillas de Ecología para los estudiantes de la clase por \$150000. Si cada cartilla hubiera costado \$1000 más se habrían comprado 5 cartillas menos con los \$150000. ¿Cuántas cartillas se compraron y cuánto costó cada una?

Solución

Sea x el número de cartillas compradas.

Si se compraron x cartillas por \$150000, cada cartilla costó $\dfrac{150000}{x}$ pesos.

Si cada cartilla hubiera costado \$1000 más, se habrían comprado $x-5$ cartillas con el mismo dinero y cada cartilla habría costado $\dfrac{150000}{x-5}$, y su valor habría sido \$1000 más que el precio de compra inicial. Esto es,

$$\begin{aligned}\frac{150000}{x-5} &= \frac{150000}{x} + 1000\\ \frac{150000}{x-5} - \frac{150000}{x} - 1000 &= 0\\ \frac{150000x - 150000(x-5) - 1000x(x-5)}{x(x-5)} &= 0.\end{aligned}$$

Si un cociente es igual a cero, entonces el numerador tiene que ser cero, esto es,

$$150000x - 150000(x-5) - 1000x(x-5) = 0.$$

Observamos que en el lado izquierdo de la ecuación tenemos factor común 1000.

$$1000[150x - 150(x-5) - x(x-5)] = 0.$$

Como $1000 \neq 0$, el otro factor es cero

$$150x - 150(x-5) - x(x-5) = 0.$$

Efectuamos operaciones en el primer miembro de la ecuación y simplificamos

$$\begin{aligned}150x - 150x + 750 - x^2 + 5x &= 0\\ 750 - x^2 + 5x &= 0\\ x^2 - 5x - 750 &= 0 \qquad (20.2)\end{aligned}$$

Descompongamos 750 en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 750 & 2\\ 375 & 3\\ 125 & 5\\ 25 & 5\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array}$$

Como $750 = (30)(25)$ y $30 - 25 = 5$, la ecuación (20.2) se puede escribir como $(x - 30)(x + 25) = 0$.

Así, $x - 30 = 0$ ó $x + 25 = 0$ y las soluciones de la ecuación (20.2) son $x = 30$ y $x = -25$.

Descartamos $x = -25$. ¿Por qué? Luego la solución de la ecuación (20.2) que tiene sentido para el problema es $x = 30$.

Por lo tanto, se compraron 30 cartillas y cada una costó $\dfrac{150000}{30} = 5000$ pesos.

Verificar que la respuesta satisface las condiciones del problema.

Problema 20.4

Un agricultor tiene un terreno rectangular para una huerta, rodeado por una cerca de 200 pies de longitud. Determinar las dimensiones del terreno si su área es de 2400 pies cuadrados.

Solución

Debemos hallar las dimensiones del terreno, es decir, su largo y su ancho.

Sea x el largo, en pies, del terreno.

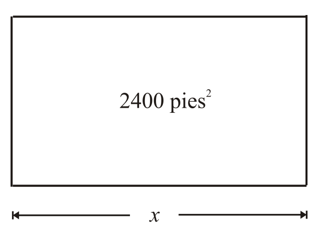

Figura 20.3

Expresemos el ancho del terreno en términos de x :

Como la longitud de la cerca es igual al perímetro del terreno y éste es la suma de las longitudes de sus lados entonces

$200 =$ perímetro del terreno $= 2$(largo del terreno) $+2$(ancho del terreno)
$200 = 2x + 2$(ancho del terreno)
$200 - 2x = 2$(ancho del terreno)

ancho del terreno $= \dfrac{200 - 2x}{2} = 100 - x.$

Ahora, como el área es 2400 pies cuadrados tenemos que

$$(\text{largo del terreno})(\text{ancho del terreno}) = x(100 - x) = 2400.$$

Resolvamos esta ecuación para hallar x :

$$\begin{aligned} x(100-x) &= 2400 \\ 100x - x^2 &= 2400 \\ -x^2 + 100x - 2400 &= 0 \\ x^2 - 100x + 2400 &= 0 \\ (x-60)(x-40) &= 0. \end{aligned}$$

Luego, $x - 60 = 0$ ó $x - 40 = 0$ y así $x = 60$ ó $x = 40$.

Si el largo del terreno es 60 pies entonces el ancho es $100 - 60 = 40$ pies. Si el largo es 40 pies entonces el ancho es $100 - 40 = 60$ pies. Luego, las dimensiones del terreno son 60 pies y 40 pies sin importar cual es el ancho y cual el largo del terreno.

Es fácil verificar que ambas respuestas satisfacen las condiciones del problema.

Problema 20.5

Un trozo de alambre de 100 pulgadas de largo, se corta en dos y cada pedazo se dobla para que tome la forma de un cuadrado. Si la suma de las áreas de los cuadrados construidos es 397 pulgadas cuadradas, encontrar la longitud de cada pedazo de alambre.

Solución

Sea x la longitud, en pulgadas, de uno de los pedazos de alambre. Entonces $100 - x$ es la longitud del otro pedazo.

El cuadrado construido con el trozo de alambre de longitud x tiene sus lados de longitud $\dfrac{x}{4}$ y su área es $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2$.

El cuadrado construido con el pedazo de longitud $100-x$ tiene sus lados de longitud $\dfrac{100-x}{4}$ y su área es $\left(\dfrac{100-x}{4}\right)^2$.

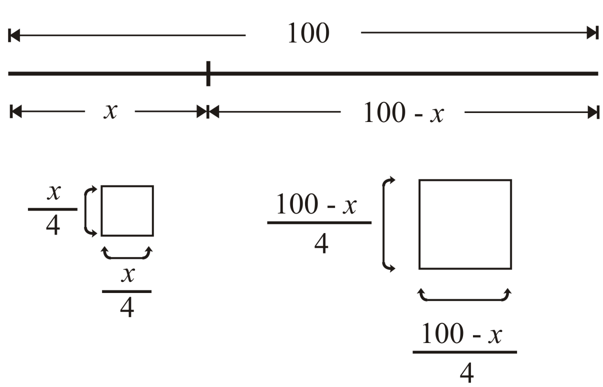

Figura 20.4

Como la suma de las áreas de los dos cuadrados es 397 pulgadas cuadradas entonces

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{100-x}{4}\right)^2 = 397.$$

Para hallar x resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{100-x}{4}\right)^2 - 397 &= 0\\
\frac{x^2}{16} + \frac{(100-x)^2}{16} - 397 &= 0\\
\frac{x^2 + (100-x)^2 - (397)(16)}{16} &= 0\\
x^2 + (100-x)^2 - (397)(16) &= 0\\
x^2 + 10000 - 200x + x^2 - 6352 &= 0\\
2x^2 - 200x + 3648 &= 0\\
2(x^2 - 100x + 1824) &= 0\\
x^2 - 100x + 1824 &= 0.
\end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación utilizamos la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = -100$ y $c = 1824$:

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 4(1)(1824)}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{2704}}{2} = \frac{100 \pm 52}{2}.$$

Entonces las raíces de la ecuación son

$$x = \frac{100+52}{2} \text{ y } x = \frac{100-52}{2}$$

o sea

$$x = \frac{152}{2} = 76 \text{ y } x = \frac{48}{2} = 24.$$

Por tanto, si un trozo de alambre mide 76 pulgadas, el otro mide $100 - 76 = 24$ pulgadas. Y si uno de los trozos de alambre mide 24 pulgadas, el otro mide $100 - 24 = 76$ pulgadas. Esto es, las longitudes de los dos pedazos de alambre que satisfacen las condiciones del problema son 76 pulgadas y 24 pulgadas.

Problema 20.6

¿Qué tamaño debe tener una lámina de lata rectangular, cuyo largo es el doble de su ancho, si se va a utilizar para construir una caja sin tapa, cortando cuadrados de 3 pulgadas de lado en cada esquina, cuyo volumen debe ser 60 pulgadas cúbicas?

Solución

Sea x el ancho, en pulgadas, de la lámina de lata; entonces su largo es $2x$. Como en cada esquina de la lámina se recorta un cuadrado de 3 pulgadas de lado, las dimensiones de la base rectangular de la caja son ancho $x - 6$ y largo $2x - 6$.

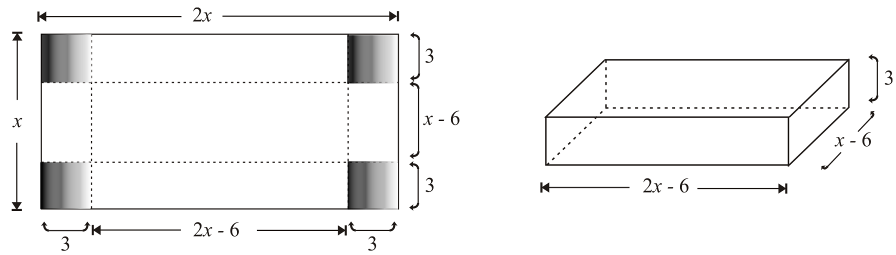

Figura 20.5

El volumen de la caja es largo por ancho por alto. Como la altura de la caja es 3 pulgadas y su volumen debe ser 60 pulgadas cúbicas, entonces

$$(2x-6)(x-6)(3) = 60.$$

Resolvamos esta ecuación para hallar x :

$$\begin{aligned}
3(2x-6)(x-6) &= 60 \\
(2x-6)(x-6) &= 20 \\
2x^2 - 12x - 6x + 36 &= 20 \\
2x^2 - 18x + 36 &= 20 \\
2x^2 - 18x + 16 &= 0 \\
2(x^2 - 9x + 8) &= 0 \\
x^2 - 9x + 8 &= 0 \\
(x-8)(x-1) &= 0.
\end{aligned}$$

Así, las soluciones de la ecuación son $x = 8$ y $x = 1$.

Observamos que el segundo valor de x no tiene sentido para el problema porque si el ancho de la lámina es de 1 pulgada no podemos recortar los cuadrados en las esquinas de 3 pulgadas de lado.

Luego, la lámina debe tener 8 pulgadas de ancho y 16 de largo.

Así al recortar la lámina con estas dimensiones, se arma una caja de 10x2x3 pulgadas cúbicas, cuyo volumen es 60 pulgadas cúbicas.

Talleres

Taller 1: Terminología básica y polinomios.

1. Hallar el valor exacto de las siguientes expresiones:

   (a) $(-2)^6$.

   (b) -2^6.

   (c) -2^{-6}.

   (d) $2^{-3} - 3^{-2}$.

   (e) $3^0 + 0^3$.

   (f) $\dfrac{3^{-3}}{2^{-3}}$.

   (g) $\dfrac{4^{-3}}{2^{-8}}$.

   (h) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \dfrac{9}{16}$.

   (i) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2} \left(\dfrac{2}{5}\right)^{3}$.

2. Simplificar la expresión algebraica dada y expresar con exponentes positivos.

   (a) $\dfrac{4x^3y^7}{5x^2y^5}$.

   (b) $(-5x^3y^{-2})^{-2}$.

   (c) $\dfrac{18x^{11}}{(6x^4)^2}$.

   (d) $\dfrac{2a^2b^{-5}c^{-7}}{5a^{-3}b^{-4}c^{-6}}$.

3. En los siguientes polinomios hallar el coeficiente numérico, el grado de cada término y también el grado del polinomio.

   (a) $x^2 + 3x^3 - 4$.

   (b) $x^2 - 10^5$.

   (c) $y^3 - 3y^2 + 4y - 2$.

4. Reunir los términos semejantes en las siguientes expresiones:

   (a) $3a - 11a + 2a$.

(b) $6x - 3y + 4x + 5y$.

(c) $4 + 7 - 8 - 5 + x$.

(d) $2x^2 + 4x - 2x^2 - 5x$.

(e) $2abc - 3abc + 12abc$.

(f) $4ax^2 + 5a^2x - 2ax^2 + 5a^2x$.

(g) $\frac{1}{2}yz^2 + \frac{4}{5}yz^2 - yz^2 - \frac{3}{4}yz^2$.

5. En los ejercicios siguientes, eliminar los signos de agrupación y luego reunir los términos semejantes:

(a) $x - 3 - 2\left[2 - 3\left(x - y\right)\right]$.

(b) $4x - \{3y + [4x - (3y - 4x) - 3y] - 4x\} - 3y$.

(c) $7y + 3y - [5x - y - (3x - 2y) - y] - 2x$.

(d) $4x^2 - \left\{3x^2 - 2\left[y - 3\left(x^2 - y\right)\right] + 4\right\}$.

(e) $-\left\{-\left[-\left(a + b - c\right)\right]\right\} - \left\{+\left[-\left(c - a + b\right)\right]\right\} + \left[-\left\{-a + \left(-b\right)\right\}\right]$.

Taller 2: Suma y resta de polinomios.

1. Hallar la suma de los siguientes polinomios:
   (a) $9x - 3y + 5$, $-x - y + 4$, $-5x + 4y - 9$.

   (b) $ax - ay - az$, $-5ax - 7ay - 6az$, $4ax + 9ay + 8az$.

   (c) $a^4 - b^4$, $-a^3b + a^2b^2 - ab^3$, $-3a^4 + 5a^3b - 4a^2b^2$, $-4a^3b + 3a^2b^2 - 3b^4$.

   (d) $x^4 + 2x^2y^2 + \frac{2}{7}y^4$, $-\frac{5}{6}x^4 + \frac{3}{8}x^2y^2 - \frac{1}{6}xy^3 - \frac{1}{14}y^4$, $-\frac{5}{6}xy^3 - \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{7}y^4$.

2. (a) De $x + y - z$ restar $-x - y + z$.

   (b) De $y^5 - 9y^3 + 6y^2 - 31$ restar $-11y^4 + 31y^3 - 8y^2 - 19y$.

   (c) Restar $\frac{7}{9}x^2y$ de $x^3 + \frac{2}{3}x^2y - 6$.

   (d) Restar $-m^4 + \frac{7}{8}m^2n^2 - \frac{2}{9}mn^3$ de $\frac{2}{11}m^3n + \frac{5}{14}m^2n^2 + \frac{1}{3}mn^3 - 6$.

   (e) De la suma de $\frac{1}{2}a - \frac{2}{9}b$ con $\frac{1}{3}b - \frac{3}{5}c$ restar la suma de $\frac{2}{3}b + \frac{1}{5}c$ con $-\frac{1}{10}c - \frac{5}{9}b$.

Taller 3: Multiplicación y división de polinomios. Productos notables.

1. (a) Multiplicar $\frac{5}{6}a^m b^n$ por $-\frac{3}{10}ab^2c$.

   (b) Simplificar $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)\left(-\frac{3}{5}xy^2\right)\left(-\frac{10}{3}x^3\right)\left(-\frac{3}{4}x^2y\right)$.

   (c) Multiplicar $y^2 - 2y + 1$ por $y^4 - 2y^2 + 2$.

   (d) Multiplicar $\frac{1}{4}a^2 - ab + \frac{2}{3}b^2$ por $\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b$.

2. Efectuar las operaciones indicadas, utilizando los productos notables:

   (a) $(3ab - 5x^2)^2$.

   (b) $[(x^2 + 3) + x][(x^2 + 3) - x]$.

   (c) $(1 - 4ax)^3$.

   (d) $(x^3 + 6)(x^3 - 8)$.

   (e) $(a + 2)(a - 3)(a - 2)(a + 3)$.

3. Dividir:

   (a) $6m^3 - 8m^2 + 20m$ entre $-2m$.

   (b) $4a^4 - 6a^3 + 8a^2$ entre $-2a^2$.

   (c) $2x^2$ entre $x^2 - 5$.

   (d) $x^5 - 3x^4 + 9x^2 - 4$ entre $x^2 - 3x + 2$.

Taller 4: Factorización, casos 1 a 6.

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$.
2. $3a^2b - 6ab - 5a^3b^2 + 8a^2bx + 4ab^2m$.
3. $(x-3)(x-4) + (x-3)(x+4)$.
4. $3 - x^2 + 2abx^2 - 6ab$.
5. $3x^3 + 2axy + 2ay^2 - 3xy^2 - 2ax^2 - 3x^2y$.
6. $x^2 + 8x + 16$.
7. $25x^2 + 60xy + 36y^2$.
8. $16a^4 - 72a^2b^2 + 81b^4$.
9. $(x+2y)^2 + 10(x+2y) + 25$.
10. $1 - m^2n^4$.
11. $(x+1)^2 - 36y^2$.
12. $(5x+2y)^2 - (3x-7y)^2$.
13. $x^2 - 4z^2 + 9y^2 - 6xy$.
14. $36x^4 + 15x^2 + 4$.
15. $z^4 + 64$.
16. $x^4 - 7x^2 + 9$.
17. $9x^2 - 48x + 64$.
18. $4x^4 + y^4$.
19. $x^{17} - x$.
20. $x^{5m} - x^{3m}b^{4n}$.

Taller 5: Factorización, casos 7 a 10.

Factorizar los siguientes polinomios:

1. $x^2 - 26x + 165$.
2. $x^2 - 9x - 90$.
3. $110 - x - x^2$.
4. $x^4 - 14x^2 - 51$.
5. $65 + 8xy - x^2y^2$.
6. $a^2 + 17ab + 60b^2$.
7. $x^6 - 7x^3 - 8$.
8. $(a-1)^2 + 3(a-1) - 108$.
9. $6x^2 - 31x + 35$.
10. $20 - 9x - 20x^2$.
11. $4x^2 - 7xy - 15y^2$.
12. $18a^2 + 17ay - 15y^2$.
13. $21x^2 - 26xy - 72y^2$.
14. $1 + 3a^2 - 3a - a^3$.
15. $x^6 + 3x^4y^3 + 3x^2y^6 + y^9$.
16. $3a^{12} + 1 + 3a^6 + a^{18}$.
17. $x^3 - 27$.
18. $a^3 + 8b^{15}$.

Taller 6: División sintética, teorema del residuo y teorema del factor.

1. Hallar el residuo de dividir $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ entre
   (a) $x - 3$.
   (b) $x + 2$.

   Utilizar división sintética para expresar el polinomio dado como producto de 3 factores lineales.

2. Determinar si $x + 1$ y $x - 2$ son factores del polinomio $2x^3 - 5x^2 + x + 2$. Factorizar el polinomio usando división sintética.

3. Factorizar completamente los siguientes polinomios usando división sintética:
   (a) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 12x + 9$.
   (b) $n^4 - 27n^2 - 14n + 120$.
   (c) $a^5 - 23a^3 - 6a^2 + 112a + 96$.

Taller 7: Ecuaciones de primer grado en una variable.

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $8x - 15x - 30x - 51x = 53x + 31x - 172.$
2. $-\{3x + 8 - [-15 + 6x - (-3x + 2) - (5x + 4)] - 29\} = -5.$
3. $(3y - 7)^2 - 5(2y + 1)(y - 2) = -y^2 - [-(3y + 1)].$
4. $2(3x + 3) - 4(5x - 3) = x(x - 3) - x(x + 5).$
5. $2y - \frac{y}{2} + \frac{y + 1}{4} = 6y.$
6. $\frac{3}{5}(2z - 7) - \frac{2}{3}(z - 8) = \frac{4z + 1}{15} + 4.$
7. $x - \left(3x - \frac{2x + 5}{10}\right) = \frac{1}{6}(2x + 67) + \frac{5}{3}\left(1 + \frac{x}{5}\right).$
8. $9w - (5w + 1) - \{2 + 8w - (7w - 5)\} + 9w = 0.$
9. $(3y - 1)^2 - 5(y - 2) - (2y + 3)^2 - (5y + 2)(y - 1) = 0.$
10. $\left(3 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{3}\right) = 7 - \left(x - \frac{x}{2}\right).$

Taller 8: Problemas con ecuaciones de primer grado en una variable.

1. Tres números enteros consecutivos suman 204. ¿Cuáles son los números?

2. Repartir \$30000 entre A, B y C de modo que la parte de B sea el doble de la de A y la de C el triple de la de A.

3. Cuando se pregunta a Lucas por su edad, responde: Si al doble de mi edad se le quitan 17 años tendría lo que me falta para tener 100 años. ¿Qué edad tiene Lucas?

4. Una persona tiene \$14000 en dos bolsas. Si de la bolsa que tiene más dinero saca \$2000 y los pone en la otra bolsa, ambas tendrían igual cantidad de dinero. ¿Cuánto dinero tiene en cada bolsa?

5. Un muchacho compró el triple de lápices que de cuadernos, cada lápiz le costó \$5000 y cada cuaderno \$6000. ¿Cuántos lápices y cuadernos compró, si por todo pagó \$147000?

6. El martes gané el doble de lo que gané el lunes, el miércoles el doble de lo que gané el martes, el jueves el doble de lo que gané el miércoles, el viernes \$30000 menos que el jueves y el sábado \$10000 más que el viernes. ¿Cuánto gané cada día, si en los seis días gané \$911000?

7. Un hombre deja una herencia de \$16500000 para repartir entre tres hijos y dos hijas, y decide que cada hija reciba \$2000000 más que cada hijo. ¿Cuánto recibe cada uno?.

8. El largo de un buque que es 461 pies, excede en 11 pies a 9 veces el ancho. ¿Cuál es el ancho del buque?

9. Hace 14 años la edad de un padre era el triple de la edad de su hijo y ahora es el doble. ¿Qué edad tenían hace 14 años?

10. Si un número se multiplica por 8 el resultado es el número aumentado en 21. ¿Cuál es el número?

Taller 9: Máximo común divisor, mínimo común múltiplo y simplificación de fracciones.

1. Hallar el *m.c.d.* y el *M.C.M.* de los siguientes polinomios:

   (a) $3a^2m^2 + 6a^2m - 45a^2$ y $6am^2x + 24amx - 30ax$.

   (b) $2a^2 + 2a$, $3a^2 - 3a$ y $a^4 - a^2$.

   (c) $2\left(3n-2\right)^2$, $135n^3 - 40$ y $12n - 8$.

   (d) $18a^3 + 3a^2b - 6ab^2$, $15a^3 + 22a^2b + 8ab^2$ y $60a^3 + 18a^2b - 24ab^2$.

   (e) $x^3 - 9x + x^2 - 9$, $x^4 - 10x^2 + 9$, $x^2 + 4x + 3$ y $x^2 - 4x + 3$.

2. Simplificar las siguientes fracciones:

   (a) $\dfrac{9x^2 - 24x + 16}{9x^4 - 16x^2}$.

   (b) $\dfrac{\left(x^2 - x - 2\right)\left(x^2 - 9\right)}{\left(x^2 - 2x - 3\right)\left(x^2 + x - 6\right)}$.

   (c) $\dfrac{2x^2 - 22x + 60}{75 - 3x^2}$.

   (d) $\dfrac{\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 8x + 16\right)}{\left(x^2 - 4x\right)\left(1 - x^2\right)}$.

   (e) $\dfrac{z^5 - z^3 + 8z^2 - 8}{z^4 + 5z^3 - 7z^2 - 41z - 30}$.

Taller 10: Operaciones con fracciones.

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar el resultado:

1. $\dfrac{x^2-4}{xy^2}.\dfrac{2xy}{x^2-4x+4}$.

2. $\dfrac{6x-12}{4xy+4x}.\dfrac{y^2-1}{2-3x+x^2}$.

3. $\left(\dfrac{ax+ab+cx+bc}{a^2-x^2}\right).\left(\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2+(b+a)\,x+ab}\right)$.

4. $\dfrac{24x^3y^2}{5z^2} \div \dfrac{8x^2y^3}{15z^4}$.

5. $\left[\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{x^2}{x^2-1}\right] \div \dfrac{x^3}{1-x}$.

6. $\dfrac{a^2+ab-6b^2}{a^2+4ab+3b^2}.\dfrac{4a^2-4ab+b^2}{2a^2-5ab+2b^2} \div \dfrac{2a-b}{a+b}$.

7. $\dfrac{x^2-2xy}{3\,(x^2-y^2)}+\dfrac{y}{6x-6y}-\dfrac{x}{4\,(x+y)}$.

8. $\dfrac{3x-y}{(x-y)\,(x+y)}-\dfrac{x+3y}{(x+y)\,(x+2y)}-\dfrac{1}{x+2y}$.

9. $\dfrac{10}{(2r-3s)\,(2r+s)}+\dfrac{1}{(2r+s)\,(r+s)}-\dfrac{5}{(2r-3s)\,(r+s)}$.

10. $\dfrac{9a+8b}{(3a-2b)\,(a+4b)}-\dfrac{5a}{(3a-2b)\,(a-4b)}+\dfrac{16b}{(a+4b)\,(a-4b)}$.

11. $\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2-x-3}.\dfrac{6x^2-7x-3}{x^2+2x-3} \div \dfrac{2x+3}{x+3}$.

12. $\dfrac{3}{x}-\dfrac{2-3x}{3x-1}+\dfrac{1-2x}{x\,(3x-1)}$

Taller 11: Potenciación y radicación.

1. Hallar el valor exacto de:

   (a) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$.

   (b) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-64}$.

   (c) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32}}$.

   (d) $\sqrt[3]{125} + \sqrt{64}$.

2. Simplificar las siguientes expresiones y expresar la respuesta con exponentes positivos:

   (a) $\dfrac{3a^2mn}{a^{-3}m^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{3}{4}}}$.

   (b) $\left(\dfrac{2x^3y^4}{z^3}\right)^4\left(\dfrac{3y^2z^3}{2x^2}\right)^2$.

   (c) $\left(\dfrac{12x^{2a-2}}{6x^{a-2}}\right)^4\left(\dfrac{1}{2x^{2a}}\right)^2$.

   (d) $\dfrac{\left(b^2a^3t\right)^4}{\left(bat\right)^2\left(ba^2t\right)^3}$.

   (e) $\left(\dfrac{a^{-1}b^2c^{-2}}{a^0b^2c^{-3}}\right)^{-4}$.

   (f) $\left(\dfrac{b^{-2}a^{-1}t^0}{b^{-3}a^{-2}t^{-1}}\right)^2$.

   (g) $\left(\dfrac{2^{-4}a^{-1}b^2}{4^{-1}a^{-2}b^{-1}}\right)^2$.

   (h) $\dfrac{6a^2b^{-3}c^{-\frac{1}{2}}}{18a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}}}$.

(i) $\left(\dfrac{16^{-1}a^{\frac{4}{3}}b^{-4}}{81^{-2}c^{\frac{8}{5}}}\right)^{\frac{1}{4}}$.

(j) $\left(8a^2y^{-\frac{2}{3}}\right)\left(\dfrac{3}{4}a^{-3}y^{\frac{1}{3}}\right)$.

(k) $\left(\dfrac{16a^3b^{\frac{1}{2}}}{a^0c^{\frac{4}{7}}}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

Taller 12: Ecuaciones cuadráticas en una variable.

1. Resolver las siguientes ecuaciones sin utilizar la fórmula cuadrática.

   (a) $3(2-3x) = (x+4)(x-4)$.

   (b) $7x = 15 - 30x^2$.

   (c) $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x-9}{6} = \dfrac{3}{2}$.

   (d) $\dfrac{1}{y-2} - \dfrac{1}{y-1} = \dfrac{1}{6}$.

   (e) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

   (f) $(2x+7)^2 - 3(2x+7) - 28 = 0$.

2. Resolver las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula cuadrática.

   (a) $u^2 + 2u = 6$.

   (b) $8x^2 - 2x - 3 = 0$.

   (c) $\dfrac{5}{w^2} - \dfrac{10}{w} + 2 = 0$.

3. Sin resolver la ecuación cuadrática, determinar si tiene o no solución en los números reales. En caso afirmativo, indicar las características de sus raíces.

   (a) $16x^2 + 1 = 8x$.

   (b) $x^2 - 2x + 2 = 0$.

   (c) $2x^2 - x - 2 = 0$.

4. Resolver las primeras dos ecuaciones del ejercicio anterior y comprobar los resultados hallados allí.

Taller 13: Problemas con ecuaciones cuadráticas en una variable.

1. El cuadrado de un número disminuido en 9 equivale a ocho veces la cantidad en que el número excede a 2. Hallar el número.

2. Un tercio del área de un triángulo rectángulo es igual a 200 cm^2. Si uno de sus catetos es 10 cm mayor que el otro cateto, hallar la longitud de la hipotenusa.

3. Hallar tres números consecutivos tales que el cociente del mayor entre el menor es igual a los $\frac{3}{10}$ del número intermedio.

4. Los gastos de un paseo son \$900000 pesos. Si dejaran de ir 3 personas, cada una de las restantes tendría que pagar \$10000 más. ¿Cuántas personas van al paseo y cuánto paga cada una?

5. El producto de las edades de un padre y su hijo es 352 y si la edad del padre se divide entre la del hijo, el cociente es 2 y el residuo es 10. Hallar ambas edades.

6. Un terreno rectangular de dimensiones 26 metros por 30 metros, se rodea por un camino de ancho uniforme. Si el área del camino es de 240 metros cuadrados, determinar su ancho.

7. Se tienen 100 centímetros cuadrados de cartón para construir una caja de base cuadrada, sin tapa, cuya altura sea 10 centímetros más grande que el lado de la base. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja si se usa todo el material disponible?

Bibliografía

[1] Arbeláez, Hugo; Bustamante, Eddye; Correa, Beatriz; Muñoz, Luz Elena. *Notas para un curso de Matemáticas Básicas (Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín).* 2008.

[2] Asmar, Abraham; Asmar, Iván; Puerta, Fernando. *Curso de nivelación Matemáticas Básicas (Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín).* 2006.

[3] Baldor, Aurelio. *Álgebra. Cuarta reimpresión (Ultra S.A. de C.V.).* 2011.

[4] Rees, Paul; Sparks, Fred W. *Álgebra. Cuarta edición (Reverté Mexicana S.A.).* 1970.

[5] Spiegel, Murray R. *Álgebra Superior (Mc Graw Hill).* 1985.

[6] Stewart, James; Redlin, Lothar; Watson, Saleem. *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo. Quinta edición (Thomson).* 2007.

[7] Swokowski, Earl W. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Quinta edición (Grupo Editorial Iberoamericana).* 1983.

[8] Vance, Elbridge P. *Modern Algebra and Trigonometry. Segunda edición (Addison-Wesley).* 1963.

[9] Villegas de Arias, Celia. *Ejercicios de Álgebra y Trigonometría (Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín).* 1982.

Índice